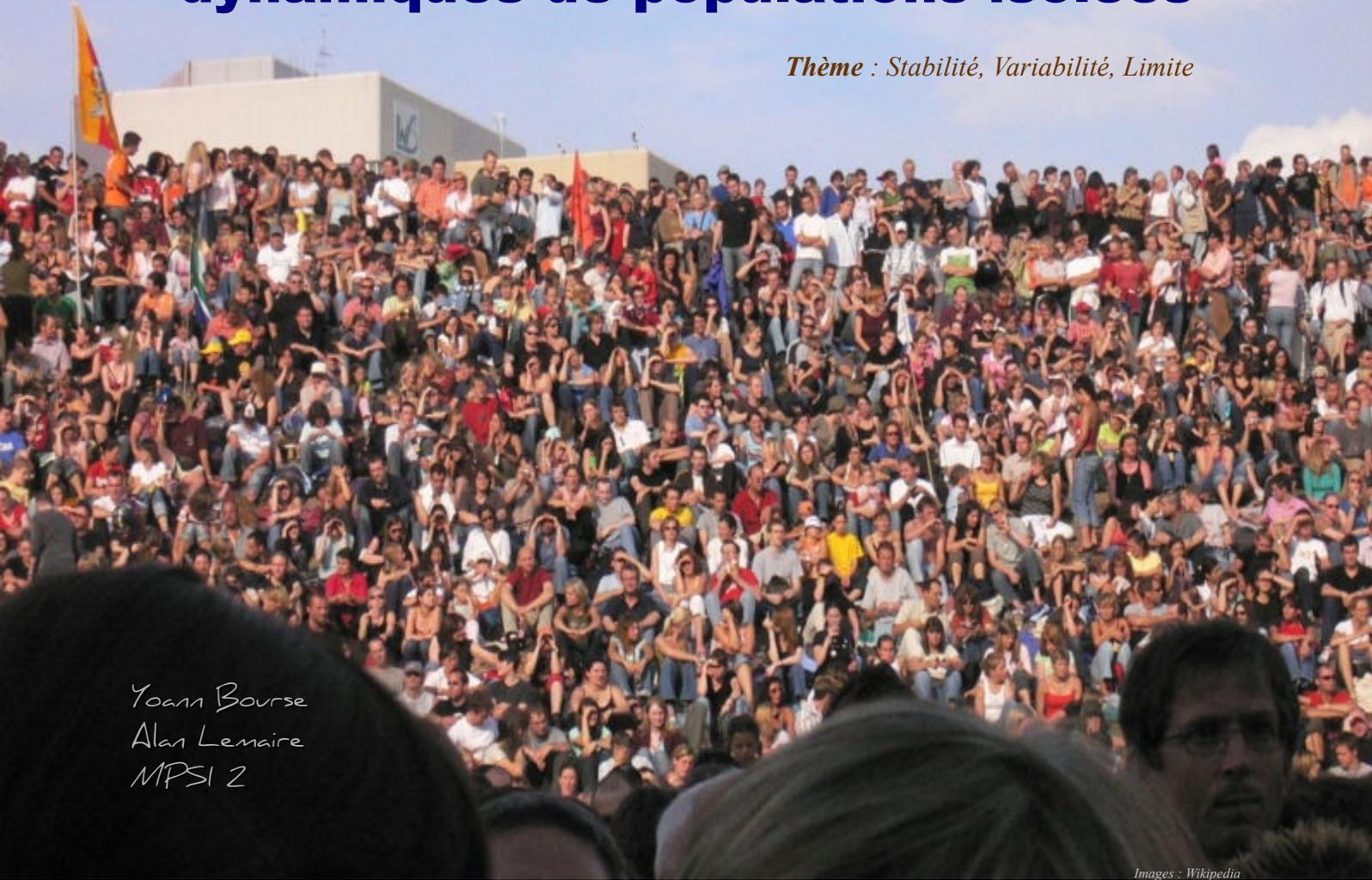


# Modélisation mathématique de dynamiques de populations isolées

*Thème : Stabilité, Variabilité, Limite*



Yoann Bourse  
Alan Lemaire  
MPSI 2

Images : Wikipedia

**Problématique :** Comment décrire de façon fiable à l'aide d'outils mathématiques l'évolution de la population humaine, et par extension de toute population isolée ou pseudo-isolée ?

PLAN DE LA PRÉSENTATION :

## MODÉLISATION DE L'ÉVOLUTION DE LA POPULATION HUMAINE

- Introduction
- I - Le modèle de Malthus
- II - Améliorations et approfondissement du modèle de Malthus
- III - Généralisation à toute population pseudo-isolée
  
- Conclusions
- Bibliographie-

La population humaine n'est pas statique : le nombre d'individus varie, évolue au cours du temps. Ce comportement est appelé **dynamique de la population**. Elle dépend de nombreux facteurs (milieu, climat, facteurs sociaux...) qu'il convient de prendre en compte. Ces dynamiques permettent de repérer différents types de variations dans les populations : **croissance**, **décroissance**, **extinction** (plus aucun représentant de l'espèce) ou **stabilité**. **Une population est dite stable** lorsque la répartition de ses classes d'âges (que l'on négligera dans cette présentation) et le taux d'accroissement de cette population sont constants.

Même si les études de populations animales sont importantes en biologie où il est fréquent de surveiller l'effectif d'une espèce, **historiquement, la première dynamique de population** étudiée est bien sur celle de l'**espèce humaine**. Depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur des modèles pour prévoir l'évolution de l'effectif de l'espèce humaine, afin d'avoir une ébauche de l'avenir. Un modèle fiable permettrait en effet de connaître à l'avance une estimation de la population mondiale (nous ne nous pencherons pas sur l'étude des populations restreintes à une zone limitée, un pays par exemple). Cependant, il paraît difficile d'appréhender la dynamique de la population humaine, en raison des **nombreux facteurs sociaux** qui interviennent (guerres, facteurs psychologiques...). De plus, en prenant l'**ascendant sur les animaux**, l'homme s'est vu offrir le champ libre pour une croissance sans restrictions au cours des derniers siècles. Cependant, il paraît évident que la planète, avec ses moyens limités, ne pourra pas supporter une population trop importante. On peut considérer que sur sa planète, l'homme forme **une population isolée**, c'est à dire qu'il n'a pas d'interaction avec d'autres milieux que le sien.

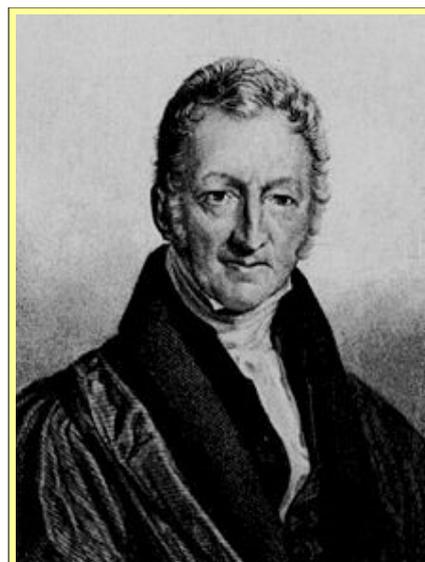
*Comment rendre compte de tous ces facteurs pour prévoir avec efficacité l'évolution de la population humaine ? Peut-on élargir les modèles trouvés pour toute population pseudo-isolée ?*

Dans cette présentation, nous nous pencherons sur différents modèles de dynamique de population, afin d'arriver à des conclusions. Nous travaillerons en **temps continu** pour des **valeurs continues de l'effectif de population**. Même si cela peut paraître surprenant du fait que l'effectif est, de manière évidente, un entier naturel, cette approximation est justifiée pour une population importante si on la considère avec suffisamment de recul.

# I) Modèle de Malthus (1789)

Le premier modèle historiquement proposé pour décrire l'évolution d'une population dans le temps concernait l'humanité. Élaboré par l'économiste britannique Thomas Malthus, ce modèle suppose **l'accroissement de la population directement proportionnel à l'effectif**. On considère une population d'individus équivalents, représentée par sa moyenne, en temps continu. On exprimera le temps en année et la population en milliards d'individus.

Dans ces conditions, l'équation caractéristique du modèle sera :



Thomas Malthus  
économiste britannique  
1766 - 1834

$$\frac{d N(t)}{dt} = \text{natalité } N(t) - \text{mortalité } N(t)$$

Le terme *natalité* est une constante positive représentant le **taux de natalité** de la population dans le milieu, le terme *mortalité* représentant son **taux de mortalité**.  $N(t)$  est bien sur la population à l'instant  $t$ . Cette équation est en réalité la traduction directe de l'hypothèse que la relation de proportionnalité de l'accroissement d'une population à son effectif. En effet, on peut mettre  $N(t)$  en facteur pour mettre en évidence le coefficient de multiplication (*natalité - mortalité*) qui n'est autre que le **taux d'accroissement naturel**.

La solution de cette équation, relativement simple, sera de la forme :

$$N(t) = C \cdot e^{((\text{natalité} - \text{mortalité}) t)}$$

Avec  $C$  une constante à déterminer par une mesure expérimentale. Cette constante permet de retrouver, à partir d'un réel adimensionné donné par l'exponentielle, une population en milliards d'individus.

Ce modèle se traduit par trois types de comportement possibles selon les valeurs des taux de natalité et mortalité. En effet, si le taux d'accroissement naturel est positif, on observera une croissance exponentielle aboutissant à un développement infini.

S'il est nul, on verra une stagnation à  $N(t) = C$ .

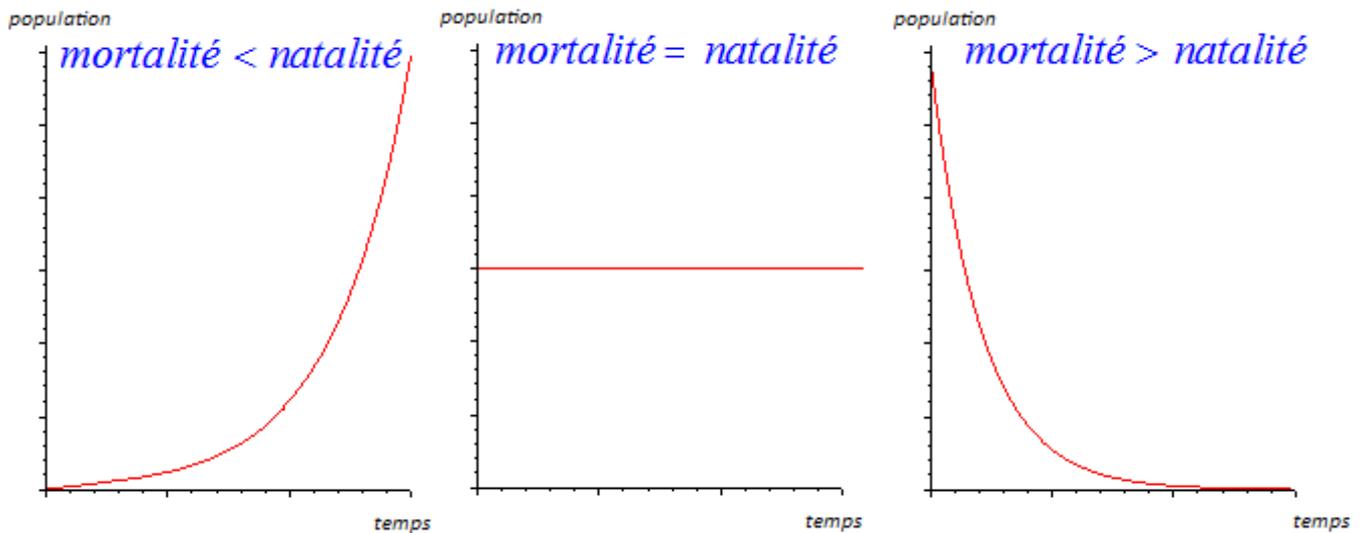
S'il est négatif, il se produira un décroissement exponentiel jusqu'à extinction de l'espèce.

Nous avons représenté schématiquement l'allure des évolutions possibles :

développement infini,

stagnation,

et extinction.



C'est la méthode que Malthus a utilisé pour prévoir, à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'évolution de la population humaine. Voici les chiffres qu'il aurait obtenu, avec les données de l'époque :

**RÉSULTATS OBTENUS PAR MALTHUS :**

| Date                           | 1750 | 1850 | 1918-1927 | 1960 | 1974 | 1987 | 1999 | 2010 | 2022 |
|--------------------------------|------|------|-----------|------|------|------|------|------|------|
| Population estimée (milliards) | 0,5  | 1    | 2         | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |

Source : *Mathematical Biology, J.D. Murray, Biomathematics Texts, Springer (1994)*

**MESURE RÉELLES (ESTIMATIONS) :**

| Date                           | 1750        | 1850      | 1920        | 1960 | 1975 | 1985 | 2000 | 2005 |  |
|--------------------------------|-------------|-----------|-------------|------|------|------|------|------|--|
| Population estimée (milliards) | 0,63 à 0,69 | 1,1 à 1,4 | 1,55 à 1,75 | 3,0  | 4,1  | 4,8  | 6,1  | 6,5  |  |

Source : *Wikipedia, d'après le Bureau de recensement des Etats-Unis, et les données de l'Organisation des Nations Unies.*

On remarque que ces résultats sont étonnamment adéquats à la réalité. Nous avons donc essayé de les retrouver, à l'aide, notamment, du logiciel de calcul formel **Maple 11**.

**PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR L'EXPRESSION ANALYTIQUE :**

```
> solution:=dsolve({D(N)(t)=natalite*N(t)-mortalite*N(t),
N(1850)=1},N(t));
> population:=unapply(rhs(solution),t);
> natalite:=mortalite+.1200523134e-1;
```

Nous avons juste procédé à une résolution d'équation différentielle. La différence entre le taux de natalité et de mortalité, le taux d'accroissement naturel, est obtenue grâce à une autre valeur expérimentale, par une simple résolution d'équation du premier ordre d'inconnue *natalité*. On a donc besoin de deux mesures expérimentales pour trouver l'expression analytique (celle-ci et celle injectée dans le calcul de l'équation différentielle pour déterminer la constante d'intégration).

**FONCTION OBTENUE PAR LE CALCUL :**

$$population := t \rightarrow \frac{e^{((natalite - mortalite) t)}}{e^{(1850 natalite - 1850 mortalite)}}$$

**RÉSULTATS OBTENUS GRÂCE À NOTRE FONCTION :**

| Date                   | 1750 | 1850 | 1918-1927 | 1960 | 1974 | 1987 | 1999 | 2010 | 2022 |
|------------------------|------|------|-----------|------|------|------|------|------|------|
| Population (milliards) | 0,30 | 1,00 | 2,32      | 3,75 | 4,43 | 5,18 | 5,98 | 6,83 | 7,88 |

**PROGRAMME MAPPLE POUR LE TRACÉ DE LA COURBE:**

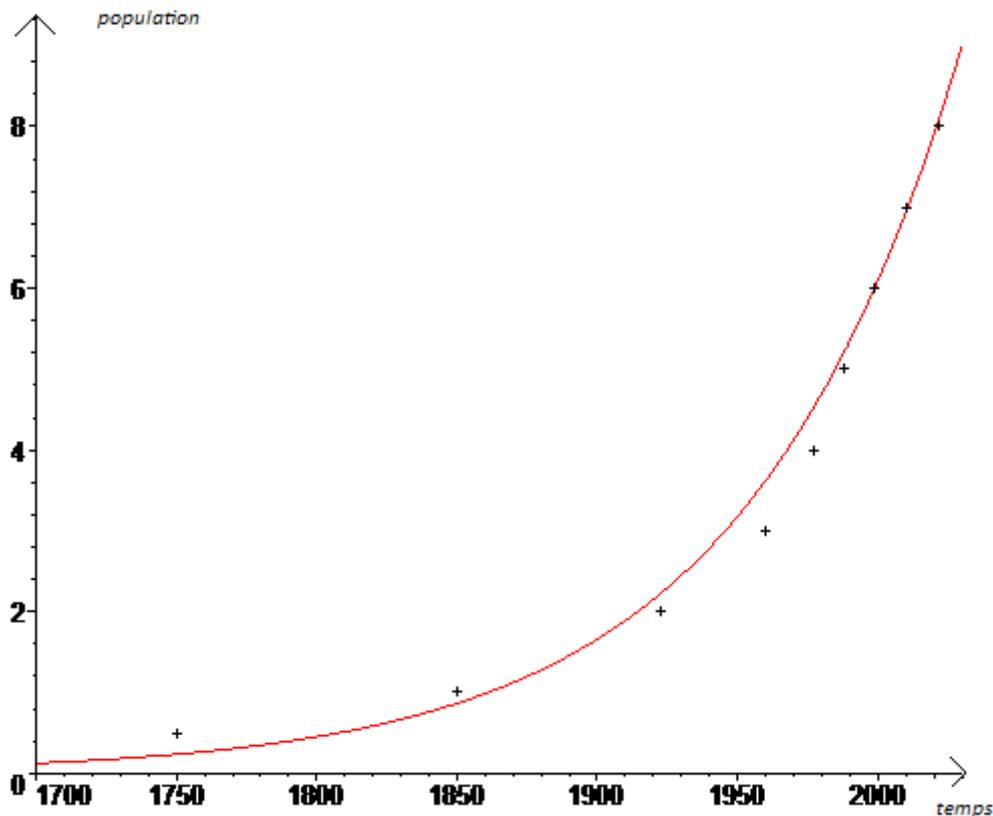
```
> with (plots) ;
> display (plot (population (t) , t=1700..2030 , color=red) ,
seq (plot ([ [i, 0] , [i, population (i) ] ] , color=blue) ,
plot ([ [1700, population (i) ] , [i, population (i) ] ] , color=blue) } ,
i={1750 , 1850 , 1923 , 1960 , 1974 , 1987 , 1999 , 2010 , 2022} ) ) ;
```

Nous avons ensuite comparé nos résultats à ceux publiés dans *Mathematical Biology* et aux mesures réelles, pour parvenir à des conclusions.

## PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LE TRACÉ DE LA COURBE AVEC COMPARAISON DES POINTS DE MALTHUS :

```
>display(  
  plot(population(t), t=1700..2030, color=red),  
  plot({[[2022,8]], [[2010,7]], [[1999,6]], [[1988,5]], [[1977,4]], [[1960,3]], [[1923,2]], [[1850,1]], [[1750,0.5]]}, style=point, color=black, symbol=cross));
```

## COURBE DE COMPARAISON DE NOS RÉSULTATS AVEC LES RÉSULTATS DE MALTHUS :



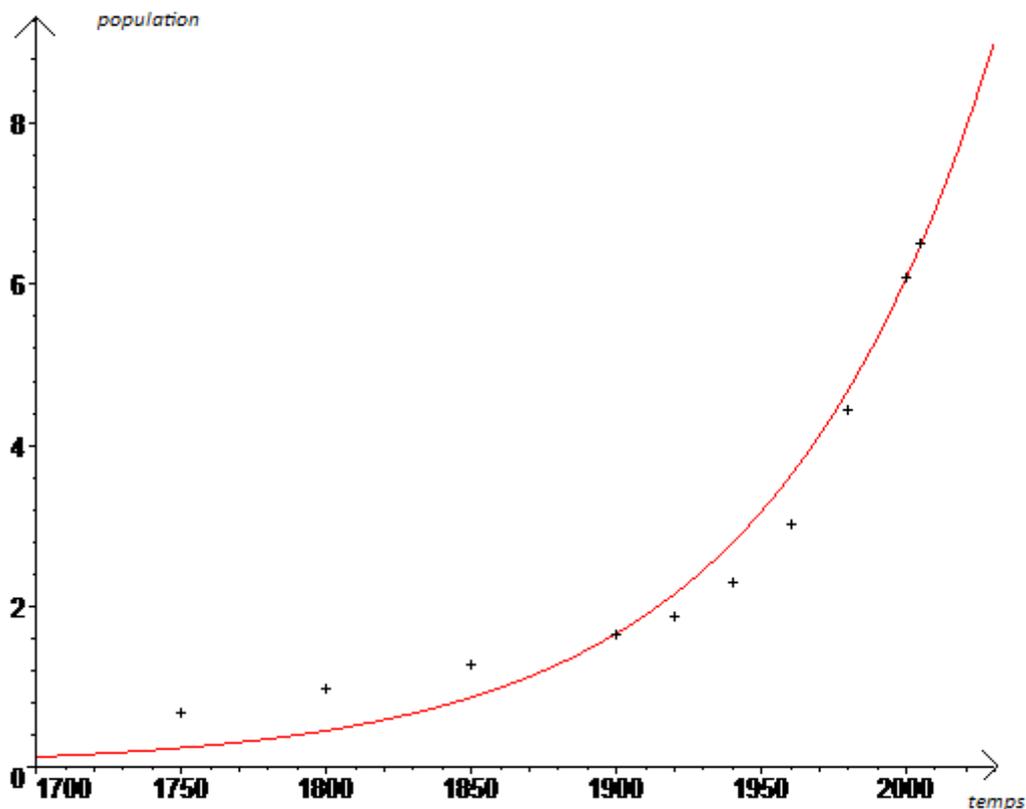
On voit que la solution obtenue par notre étude ne passe pas par tous les points calculés par Malthus. Ayant essayé le maximum de valeurs possibles pour le taux d'accroissement naturel sans plus de succès, nous pouvons établir avec certitude la conclusion suivante : soit Malthus avait utilisé une méthode de calcul différente de celle étudiée (peu probable), soit **les résultats publiés dans *Mathematical Biology* ont été largement arrondis**. Cette dernière proposition semble plus crédible.

Cependant, cette conclusion ne remet pas forcément en cause la fiabilité du modèle. Comparons nos résultats aux mesures réelles.

## PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LE TRACÉ DE LA COURBE AVEC COMPARAISON DES POINTS DE MESURE RÉELLES :

```
>display(  
  plot(population(t), t=1700..2030, color=red),  
  plot([[2005, 6.5]], [[2000, 6.082]], [[1980, 4.442]], [[1960, 3.02]], [[1940, 2.3]], [[1920, 1.86]], [[1900, 1.656]], [[1850, 1.265]], [[1800, 0.968]], [[1750, 0.660]]], style=point, color=black, symbol=cross));
```

## COURBE DE COMPARAISON DE NOS RÉSULTATS AVEC LES MESURES RÉELLES :



Ce modèle très approximatif donne des **résultats globalement corrects**. La condition de départ inspirée des résultats de Malthus ( $N(1850)=1$ ) n'est pas une mesure avérée, mais elle permet d'avoir une courbe moyenne qui traduit l'allure générale de l'évolution de la population humaine.

Le principal défaut de ce modèle est que la **croissance n'y est pas limitée**. Suivant la fonction calculée, la population en 2100 serait de 20,1 milliards, en 2200 de 66,8 milliards. Ces résultats semblent disproportionnés. En effet, la planète n'a pas une capacité de support illimitée. Il est concevable qu'elle ne puisse nourrir qu'une population limitée.

Suivant cette hypothèse, l'adéquation des résultats théoriques aux mesures réelles montre que **nous sommes encore loin de cette limite de population**. En effet, dans le cas contraire, nous aurions déjà constaté un ralentissement de la croissance de la population.

Une autre lacune de ce système est que ces données sont basées sur des taux de mortalité et de natalité fixes. Nous savons que c'est loin d'être la réalité pour l'homme, puisque, depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle, la natalité et la mortalité ont baissé, mais pas au même rythme. Une étude considérant **les variations de ces taux pourrait décrire avec plus de précision l'évolution de la population humaine**.

## II) Modèle de Malthus amélioré

Nous nous proposons d'approfondir le modèle proposé par Thomas Malthus à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. Ce dernier décrit l'évolution de la population humaine par une croissance exponentielle. Les résultats, bien que frappants, paraissent améliorables. Nous nous sommes donc penchés sur un aspect négligé du modèle : le fait que **les taux de natalité et de mortalité considérés comme constant ne le sont pas en réalité**. Le temps est toujours en années et la population en milliards d'individus.



Thomas Malthus  
économiste britannique  
1766 - 1834

Le modèle de Malthus est caractérisé par cette équation différentielle :

$$\frac{d N(t)}{dt} = \text{natalité } N(t) - \text{mortalité } N(t)$$

Ou, pour simplifier :

$$\frac{d N(t)}{dt} = AN \cdot N(t)$$

Le symbole AN représente le **taux d'accroissement naturel**. Dans les courbes étudiées précédemment, il était supposé constant. L'adéquation des résultats théoriques aux mesures expérimentales peut se justifier par l'utilisation d'une valeur moyenne de ce taux. Cependant, ce modèle ne décrit pas précisément l'évolution de la population au cours du temps. Pour plus d'exactitude, il faut considérer que le taux d'accroissement naturel de la population humaine varie. Nous avons recherché des mesures fiables de ce taux au cours du temps.

### MESURE RÉELLES DU TAUX D'ACCROISSEMENT NATUREL (ESTIMATIONS) :

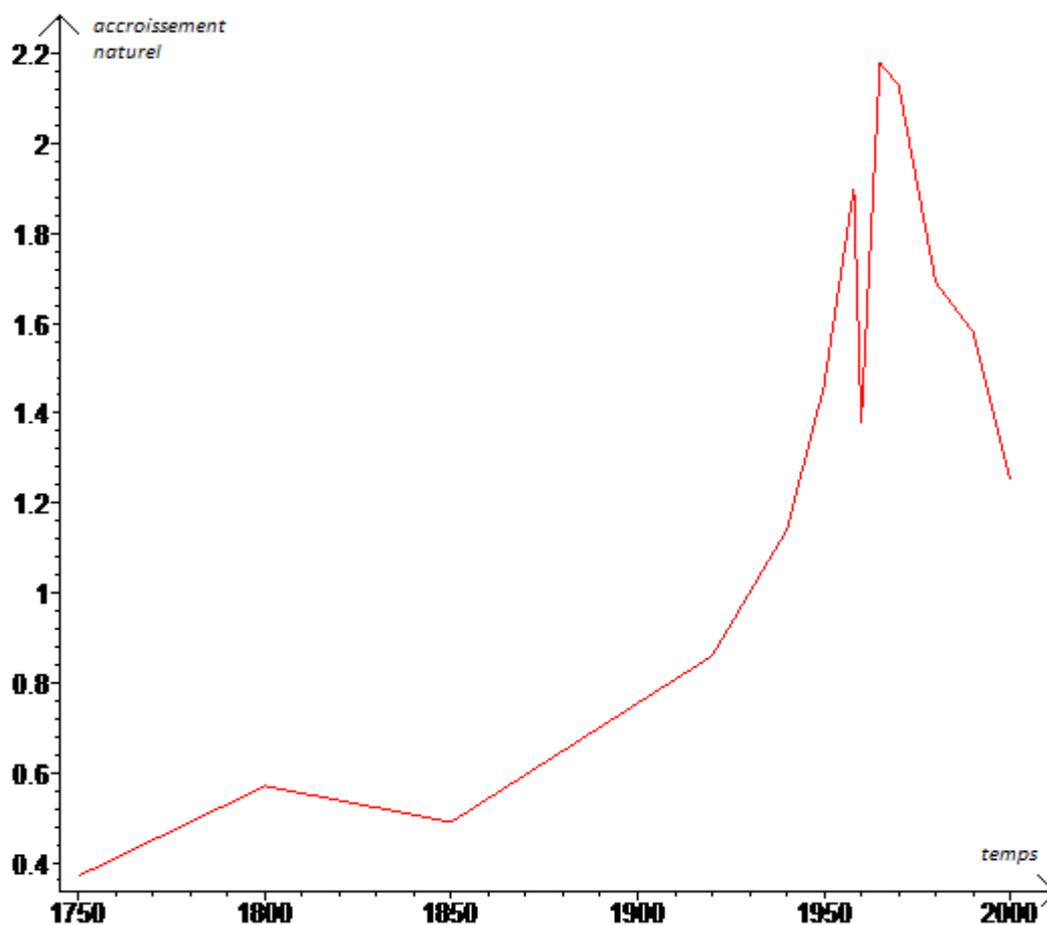
| Date                             | 1750 | 1800 | 1850 | 1920 | 1940 | 1950 | 1958 | 1960 | 1965 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Taux d'accroissement naturel (%) | 0,37 | 0,57 | 0,49 | 0,86 | 1,14 | 1,46 | 1,90 | 1,38 | 2,18 | 2,13 | 1,69 | 1,58 | 1,25 |

Source : Estimations de Willcox (1940) et Carr-Saunders (1936) ajustés et utilisés par les Nations Unis (1953, 1993) et la CIA (1993).

**PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LA COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL :**

```
>display(plot([[1750,0.37],[1800,0.57],[1850,0.49],[1920,0.86],[1940,1.14],[1950,1.46],[1958,1.90],[1960,1.38],[1965,2.18],[1970,2.13],[1980,1.69],[1990,1.58],[2000,1.25]]),style=line);
```

**COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL :**



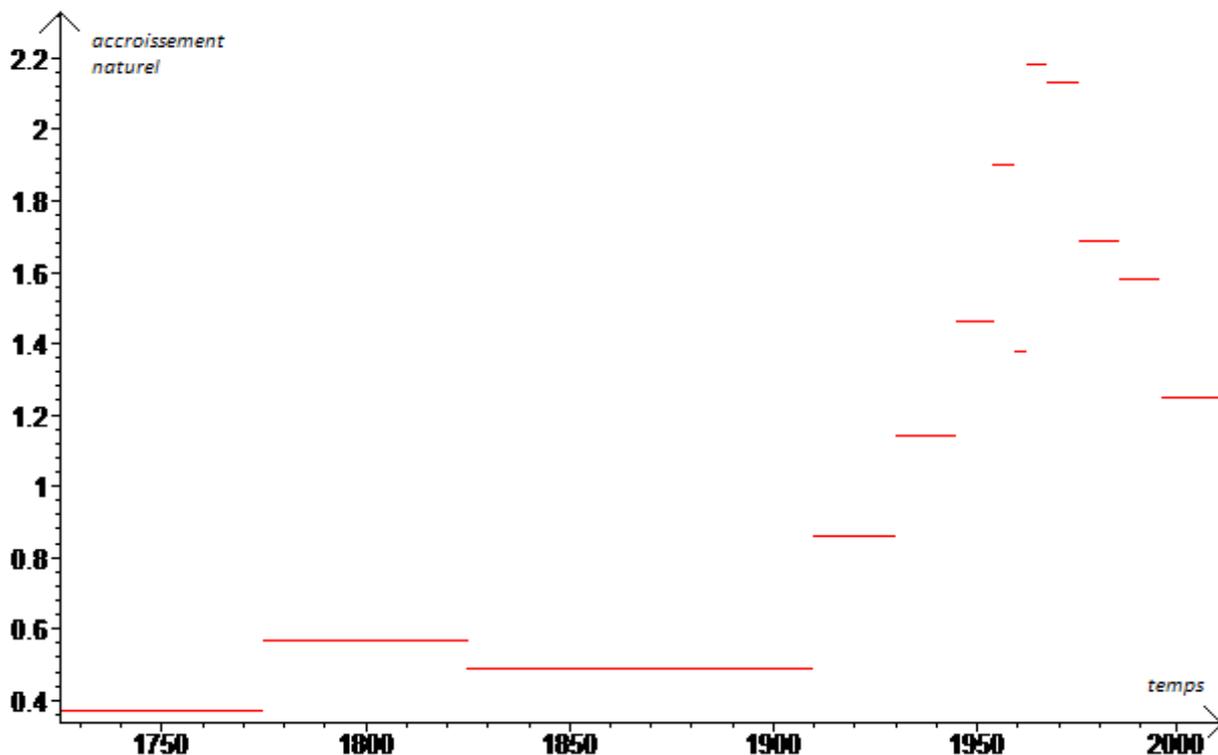
L'accroissement naturel apparaît donc comme une fonction complexe. Il semble difficile de la modéliser par une expression simple.

Pour remédier à ce problème, nous avons tout d'abord essayé de considérer les mesures du taux d'accroissement naturel comme des valeurs discrètes. Nous avons délimité des intervalles bornés par les dates pour lesquelles nous avons les valeurs empiriques, puis calculé une fonction pour chaque intervalle. Par exemple, sur l'intervalle 1750-1800, nous avons considéré un taux d'accroissement naturel fixe de 0,37. Il suffisait alors d'une mesure expérimentale pour initialiser la suite de fonctions ( $N(1750)$ ) puis de résoudre en série des équations différentielles en effectuant un raccord par continuité. Cela revient à considérer l'accroissement naturel comme la fonction en escalier suivante :

**PROGRAMME MAPPLE DE TRACÉ DE LA FONCTION EN ESCALIER :**

```
> with(plots) ;
> display(plot(0.37,1725..1775),plot(0.57,1775..1825),plot(0.49,1825..1910),
plot(0.86,1910..1930), plot(1.14,1930..1945),plot(1.46,1945..1954),
plot(1.90,1954..1959),plot(1.38,1959..1962),plot(2.18,1962..1967),
plot(2.13,1967..1975),plot(1.69,1975..1985),plot(1.58,1985..1995),
plot(1.25,1995..2015)) ;
```

**COURBE DE L'ACCROISSEMENT NATUREL EN ESCALIER :**



**PROGRAMME MAPPLE DE CALCUL DES ÉQUATIONS POUR DES VALEURS D'ACCROISSEMENT NATUREL DISCRÈTES :**

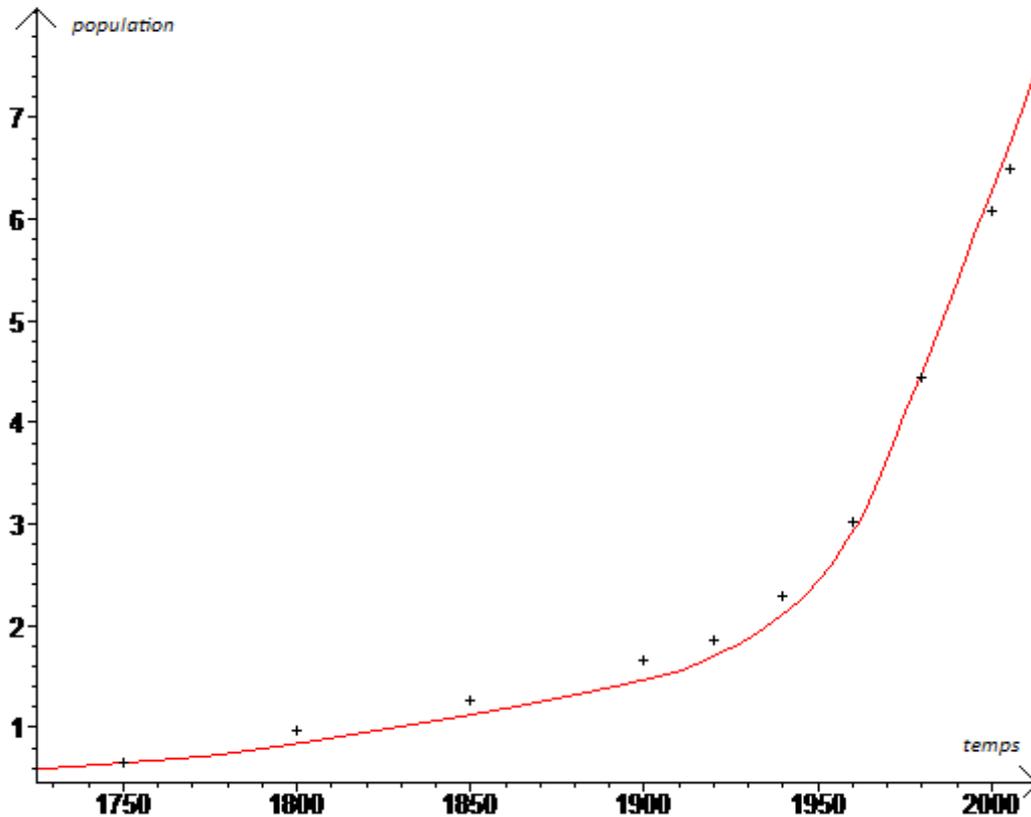
```
> b:=.1093370758e-1;
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*0.37*N(t), N(1750)=0.65},N(t));
population1:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*0.57*N(t), N(1775)=population1(1775)},N(t));
population2:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*0.49*N(t), N(1825)=population2(1825)},N(t));
population3:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*0.86*N(t), N(1910)=population3(1910)},N(t));
population4:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.14*N(t), N(1930)=population4(1930)},N(t));
population5:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.46*N(t), N(1945)=population5(1945)},N(t));
population6:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.90*N(t), N(1954)=population6(1954)},N(t));
population7:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.38*N(t), N(1959)=population7(1959)},N(t));
population8:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*2.18*N(t), N(1962)=population8(1962)},N(t));
population9:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*2.13*N(t), N(1967)=population9(1967)},N(t));
population10:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.69*N(t), N(1975)=population10(1975)},N(t));
population11:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.58*N(t), N(1985)=population11(1985)},N(t));
population12:=unapply(rhs(solution),t);
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*1.25*N(t), N(1995)=population12(1995)},N(t));
population13:=unapply(rhs(solution),t);
```

On remarque la présence d'une constance  $b$ , déterminée par des valeurs expérimentales de la même façon que le taux de natalité dans le chapitre précédent. Elle permet encore une fois de retrouver l'homogénéité des unités. Les expressions analytiques sont trop longues pour être exposées ici, mais sont facilement retrouvables par simple copier/coller.

**PROGRAMME MAPPLE DE TRACÉ DES COURBES POUR DES VALEURS D'ACCROISSEMENT NATUREL DISCRÈTES :**

```
> with(plots);
> display(plot(population1,1725..1775),plot(population2,1775..1825),
plot(population3,1825..1910),plot(population4,1910..1930),
plot(population5,1930..1945),plot(population6,1945..1954),
plot(population7,1954..1959),plot(population8,1959..1962),
plot(population9,1962..1967),plot(population10,1967..1975),
plot(population11,1975..1985),plot(population12,1985..1995),
plot(population13,1995..2015),
plot({[[2005,6.5]], [[2000,6.082]], [[1980,4.442]],
[[1960,3.02]], [[1940,2.3]], [[1920,1.86]],
[[1900,1.656]], [[1850,1.265]], [[1800,0.968]], [[1750,0.660]]},
style=point,color=black,symbol=cross));
```

### COURBE OBTENUE POUR DES VALEURS D'ACCROISSEMENT NATUREL DISCRÈTES :



Les résultats sont nettement plus précis que précédemment, ce qui met bien en évidence **l'influence de la variation du taux d'accroissement naturel sur l'évolution de la population humaine.**

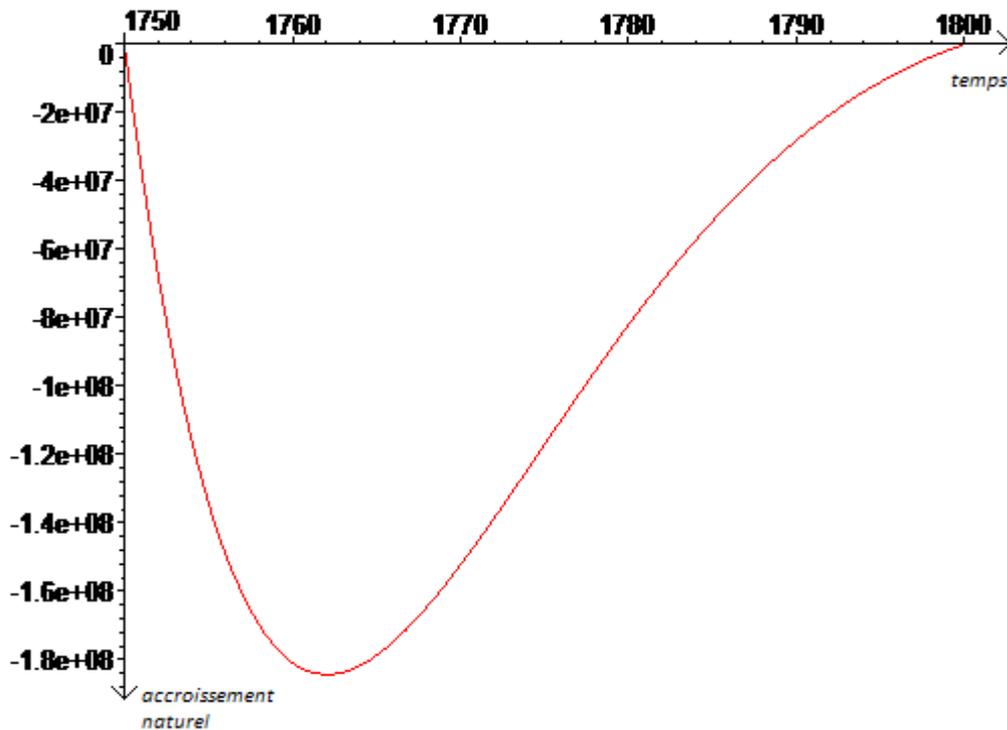
La modélisation du taux d'accroissement par des valeurs discrètes semble peu réaliste, et le code maple pour obtenir ce résultat est long et lourd. Nous avons donc cherché à trouver une **fonction qui pourrait représenter l'accroissement naturel en fonction du temps**, afin de clarifier les calculs et, peut-être, d'atteindre un degré encore plus élevé d'exactitude.

Nous ne nous étendrons pas sur la méthode du **polynôme interpolateur, qui n'a pas donné de résultats concluants**. En effet, si le polynôme interpolateur, qui est bien sur unique, donnait de bons résultats pour les valeurs précises, les valeurs intermédiaires étaient complètement absurdes (parfois très faibles, parfois très élevées). Nous avons donc du nous tourner vers d'autres formes de modélisation.

**PROGRAMME MAPPLE DU POLYNÔME INTERPOLATEUR (MÉTHODE DE NEVILLE) :**

```
> Neville:=proc(X,Y,t) local m, k, i,P:
m:=nops(X); P:=Y;
for k to m-1 do
for i to m-k do
P[i]:=((t-X[i+k])*P[i]+ (X[i]-t)*P[i+1])/(X[i]-X[i+k]));
od;
od;
P[1];
end:
>ANN:=unapply(Neville([1750,1800,1850,1920,1940,1950,1958,1960,1965,1970,1980,1990,2000],[0.37,0.57,0.49,0.86,1.14,1.46,1.90,1.38,2.18,2.13,1.69,1.58,1.25],t),t):
>with(plots);plot(ANN,1750..1800);
```

**EXEMPLE D'INCOHÉRENCE :**

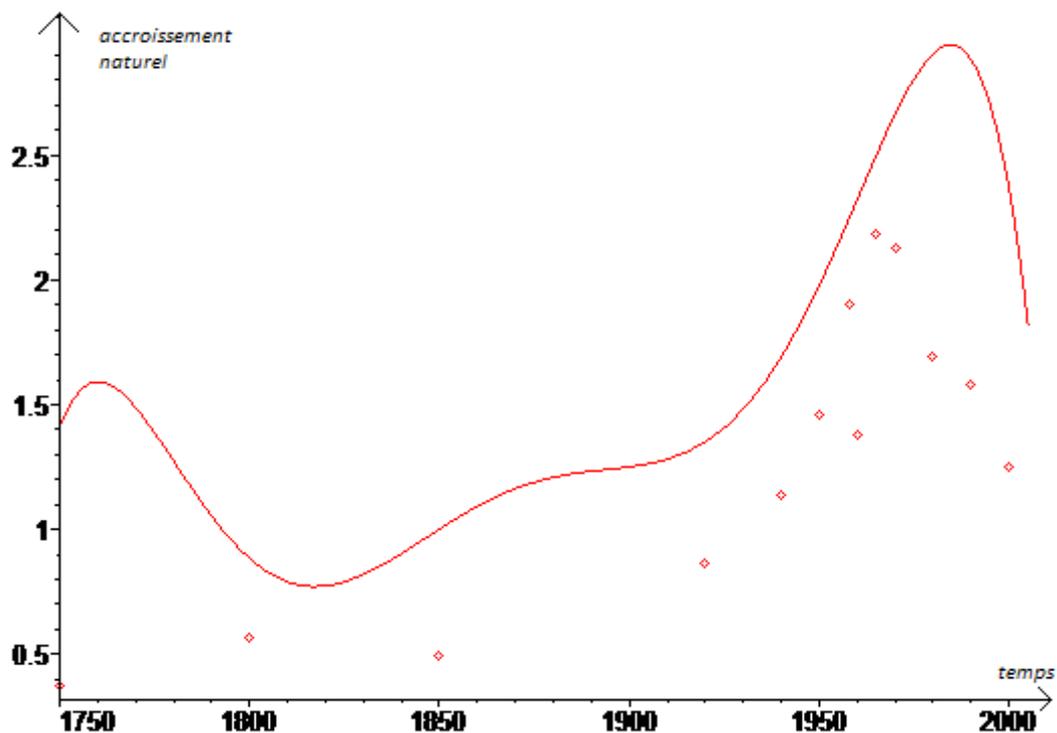


La fonction **Interp** de maple nous a permis d'obtenir des résultats plus cohérents, pour un nombre de valeurs très réduit, donc très approximatif.

### PROGRAMME MAPPLE D'UTILISATION DE LA FONCTION INTERP :

```
>ANI:=unapply(interp([1740,1800,1850,1920,1950,1970,2005],[0.37,0.49,0.57,0.86,1.46,2.13,1.25],t),t);  
>with(plots);  
>display(plot([[1750,0.37],[1800,0.57],[1850,0.49],[1920,0.86],[1940,1.14],[1950,1.46],[1958,1.90],[1960,1.38],[1965,2.18],[1970,2.13],[1980,1.69],[1990,1.58],[2000,1.25]]),style=point,plot(ANI,1750..2005,style=line));
```

### COMPARAISON DE LA MODÉLISATION ET DE L'ACCROISSEMENT NATUREL RÉEL :

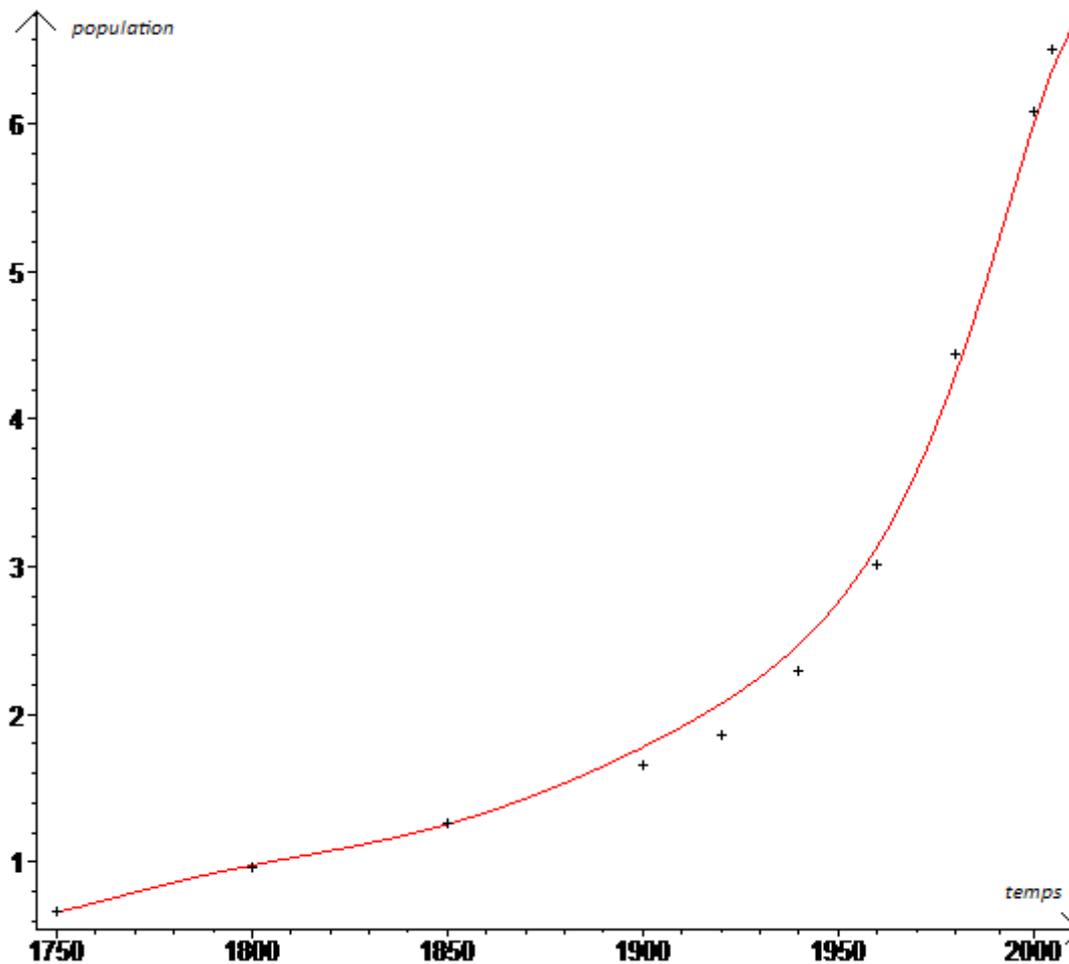


Ces résultats restent très approximatifs. Nous avons procédé à une **résolution numérique de l'équation différentielle** avec cet accroissement naturel variable, dans la mesure où Maple n'arrivait pas à donner des résultats cohérents par résolution analytique.

### PROGRAMME MAPPLE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE :

```
>b := 0.00595;  
>solution:=dsolve({D(N)(t)=b*ANI(t)*N(t), N(1750)=0.66},N(t),type=numeric);  
>with(plots);  
>display(odeplot(solution,[t,N(t)],1750..2010),plot([[2005,6.5],[2000,6.082],[1980,4.442],[1960,3.02],[1940,2.3],[1920,1.86],[1900,1.656],[1850,1.265],[1800,0.968],[1750,0.660]],style=point,color=black,symbol=cross));
```

## RÉSULTATS PAR LA FONCTION INTERP DE MAPLE :



Ces résultats sont encourageants, mais nous voulions plus de précision. De plus, en dehors de l'intervalle étudié, la fonction Interp de Maple donne des résultats incohérents. Ce modèle n'est donc pas exploitable. Nous avons donc préféré chercher une **fonction affine par morceaux** pour utiliser la **modélisation de Bernstein**, intégrée à Maple.

Nous avons donc traduit les valeurs mesurées expérimentalement par une succession de fonctions affines grâce à la fonction *piecewise* en utilisant l'équation :

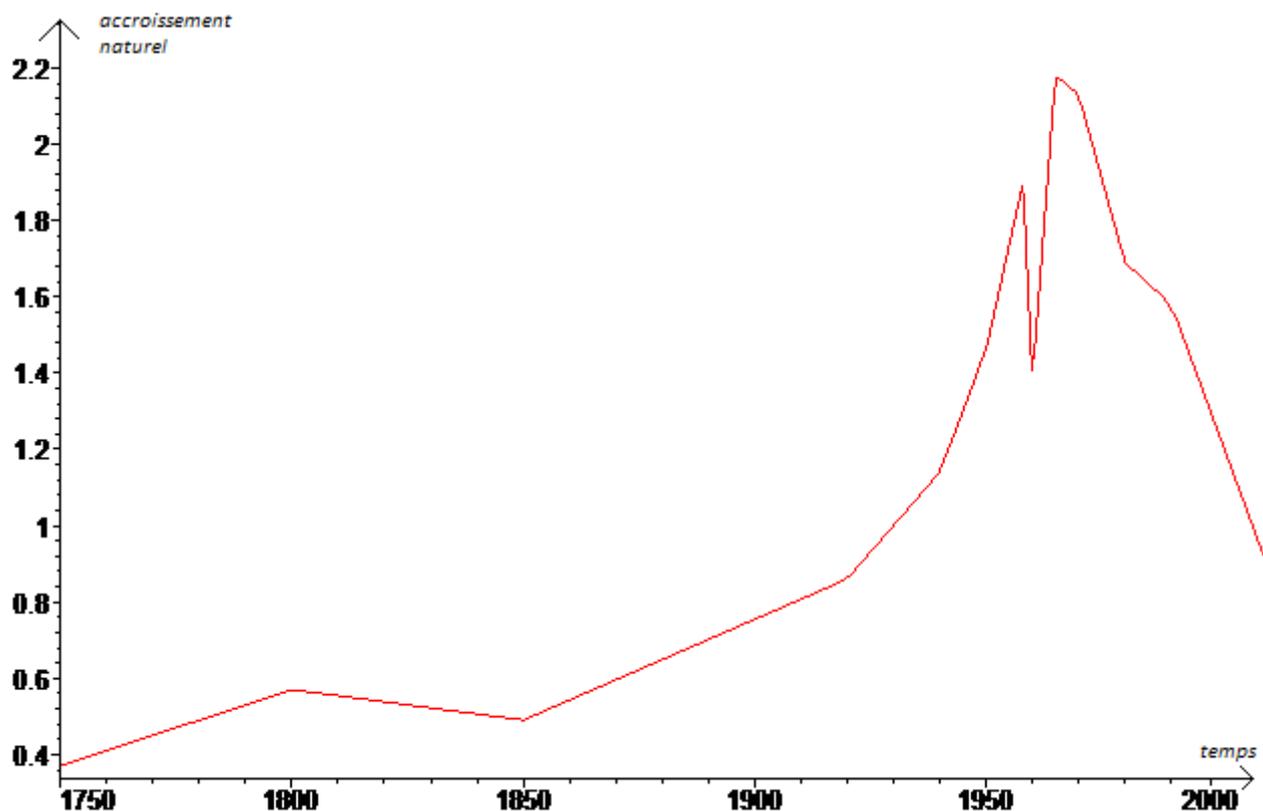
$$\begin{array}{l} N(t1) = n1 \\ N(t2) = n2 \end{array} \quad f = \left( t \rightarrow n1 + \frac{(n2 - n1)(t - t1)}{t2 - t1} \right)$$

La fonction est bien affine et à bien pour valeurs :  $f(t1)=n1$  et  $f(t2)=n2$ .

**PROGRAMME MAPPLE POUR LA FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX :**

```
>AN:=unapply(piecewise(1740<=t and t<=1800,0.37+(0.57-0.37)*(t-1750)/50,1800<=t
and t<=1850,0.57+(0.49-0.57)*(t-1800)/50,1850<=t and t<=1920,0.49+(0.86-
0.49)*(t-1850)/70,1920<=t and t<=1940,0.86+(1.14-0.86)*(t-1920)/20,1940<=t and
t<=1950,1.14+(1.46-1.14)*(t-1940)/10,1950<=t and t<=1958,1.46+(1.90-1.46)*(t-
1950)/8,1958<=t and t<=1960,1.90+(1.38-1.90)*(t-1958)/2,1960<=t and
t<=1965,1.38+(2.18-1.38)*(t-1960)/5,1965<=t and t<=1970,2.18+(2.13-2.18)*(t-
1965)/5,1970<=t and t<=1980,2.13+(1.69-2.13)*(t-1970)/10,1980<=t and
t<=1990,1.69+(1.58-1.69)*(t-1980)/10,1990<=t and t<=2010,1.58+(1.25-1.58)*(t-
1990)/10),t);
>plot(AN,1750..2010);
```

**COURBE DE L'ACCROISSEMENT NATUREL OBTENUE :**



La difficulté d'utilisation du polynôme de Bernstein est que cette modélisation ne marche que pour des fonctions définies sur l'intervalle [0,1]. Il a donc été nécessaire de transposer la fonction définie de 1740 à 2010 sur l'intervalle [0,1]. Soit  $f$  la fonction définie sur [1740,2010] et  $g$  celle sur [0,1]. On passe de l'une à l'autre par ces relations :

$$g := x \rightarrow f\left(\frac{x - 1740}{2010 - 1740}\right)$$

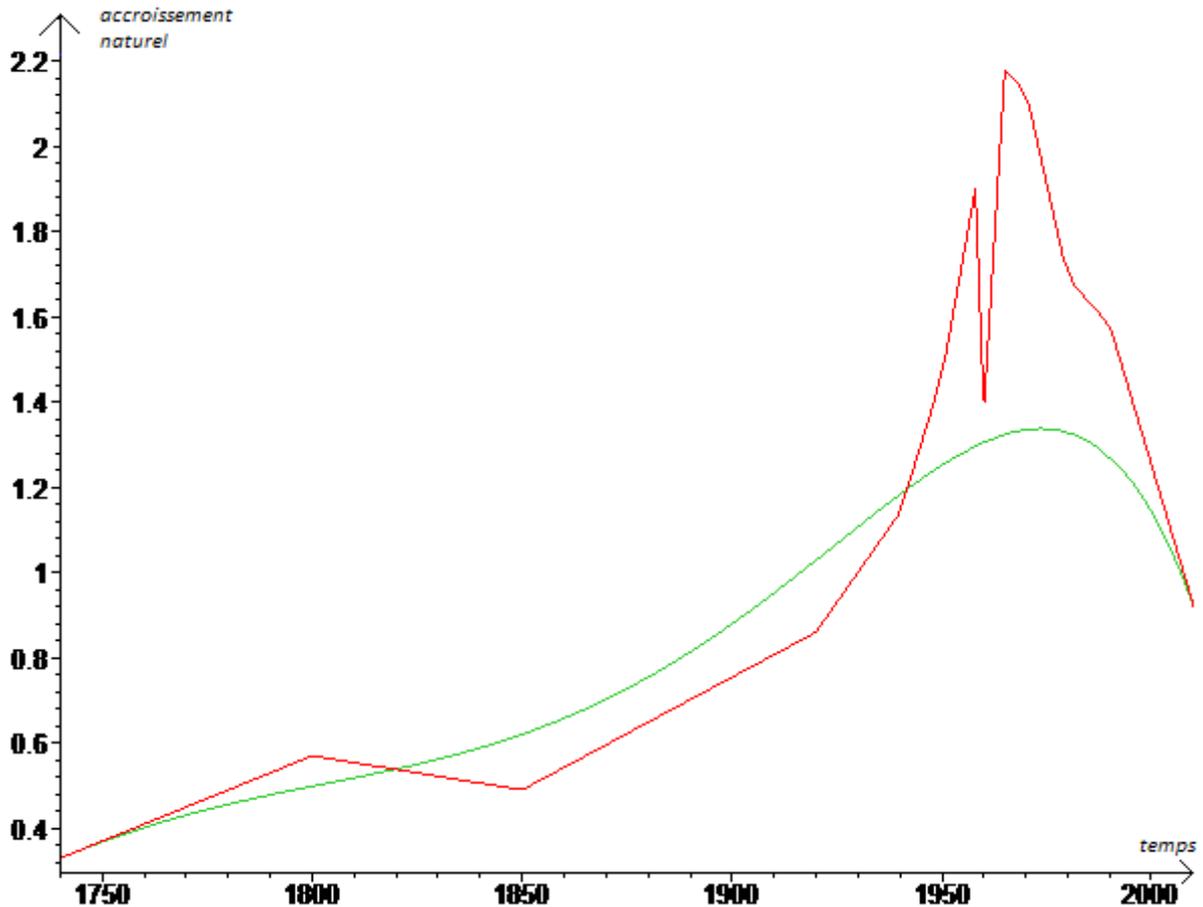
$$f := x \rightarrow g(1740 + x(2010 - 1740))$$

## PROGRAMME MAPPLE POUR L'UTILISATION DU POLYNÔME DE BERNSTEIN :

Avec AN précédemment défini :

```
> g:=unapply(AN(1740+x*(2010-1740)),x);  
> modelisation:=unapply(bernstein(8,g,x),x);  
> f:=unapply(modelisation((x-1740)/(2010-1740)),x);  
> plot([AN,f],1740..2010);
```

## RÉSULTAT DE LA MODÉLISATION PAR LE POLYNÔME DE BERNSTEIN :

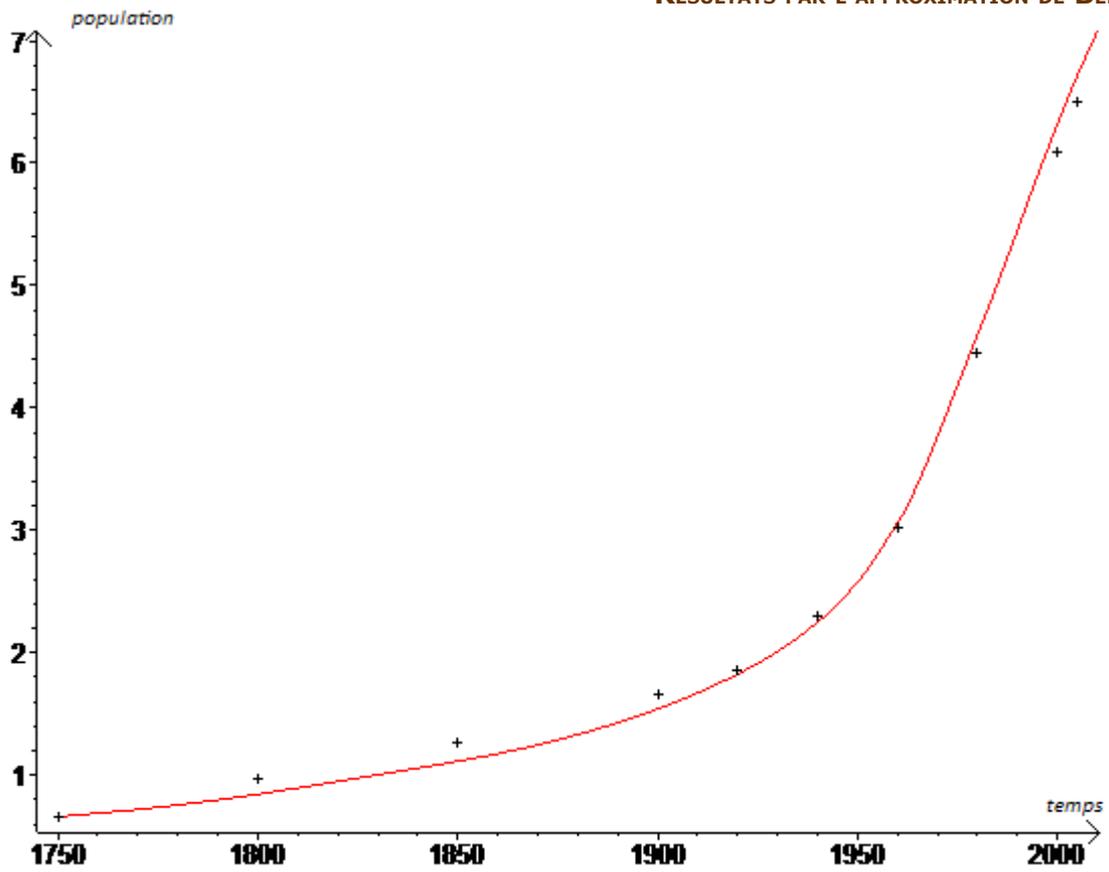


L'expression analytique de la fonction obtenue est plus satisfaisante, même si d'énormes approximations ont été faites. Pour plus de précisions, nous avons procédé à une résolution numérique :

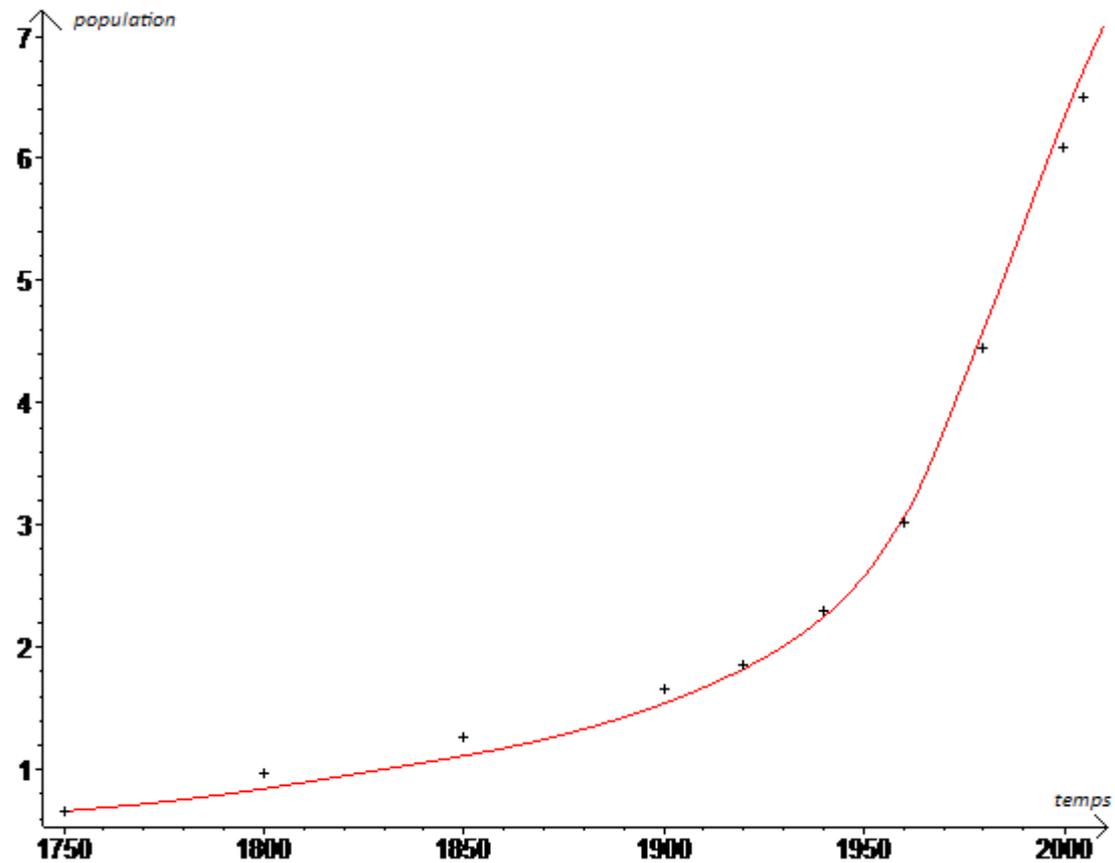
## PROGRAMME MAPPLE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE :

```
> b := 0.00595;  
> solution:=dsolve({D(N)(t)=b*f(t)*N(t), M(1750)=0.66},M(t),type=numeric);  
> with(plots);  
> display(odeplot(solution,[t,N(t)],1750..2010),plot({[[2005,6.5]], [[2000,6.082]],  
[[1980,4.442]], [[1960,3.02]], [[1940,2.3]], [[1920,1.86]], [[1900,1.656]], [[1850,1.  
.265]], [[1800,0.968]], [[1750,0.660]]},style=point,color=black,symbol=cross));
```

RÉSULTATS PAR L'APPROXIMATION DE BERNSTEIN :



RÉSULTATS PAR UTILISATION DIRECTE DE LA FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX :



Les résultats, relativement précis par rapport à la réalité, diffèrent peu. Cela souligne que la **modélisation affine suffit à rendre compte de l'évolution du taux d'accroissement naturel**. Ce modèle permet alors, par d'habiles hypothèses sur l'évolution du taux d'accroissement naturel en fonction de critères sociaux et environnementaux, de prévoir la dynamique de la population humaine dans le futur.

Nous avons voulu voir si cette étude sociale et environnementale qui n'est pas l'objet de notre TIPÉ est vraiment indispensable, et si nous ne pouvions pas plutôt trouver **un lien direct entre l'effectif de la population et l'accroissement naturel**.

Nous avons dans un premier temps observé ce qui se passerait si **l'accroissement naturel était directement proportionnel** à l'effectif de la population.

$$AN(t) = co \cdot N(t) \qquad \frac{dN(t)}{dt} = AN(t) \cdot N(t)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = co \cdot N(t) \cdot N(t)$$

**PROGRAMME MAPLE POUR ÉTABLIR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :**

```
> solution:=unapply(rhs(dsolve({D(N)(t)=co*N(t)*N(t),N(1800)=0.968},N(t))),t);
> co:=0.0043;
```

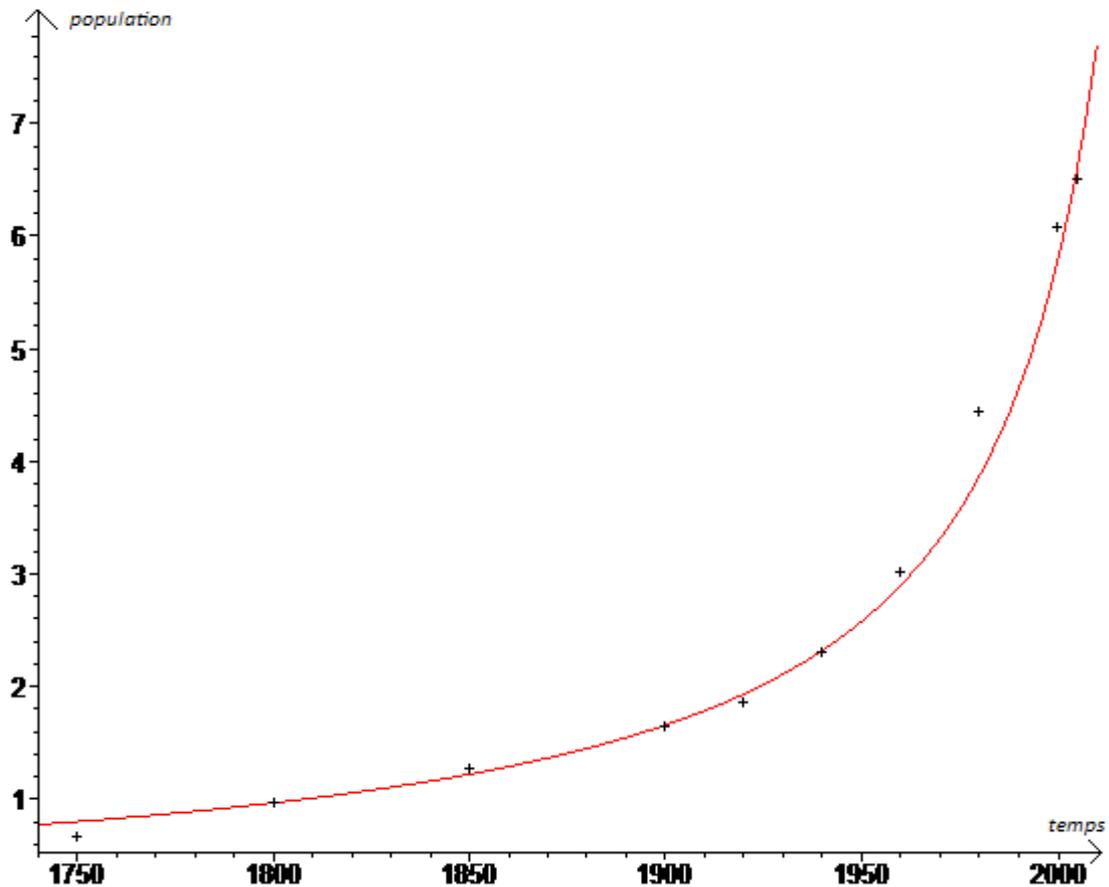
**SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :**

$$solution := t \rightarrow - \frac{121}{121 co t - 125 - 217800 co}$$

**PROGRAMME MAPLE POUR ÉTABLIR LES COURBES :**

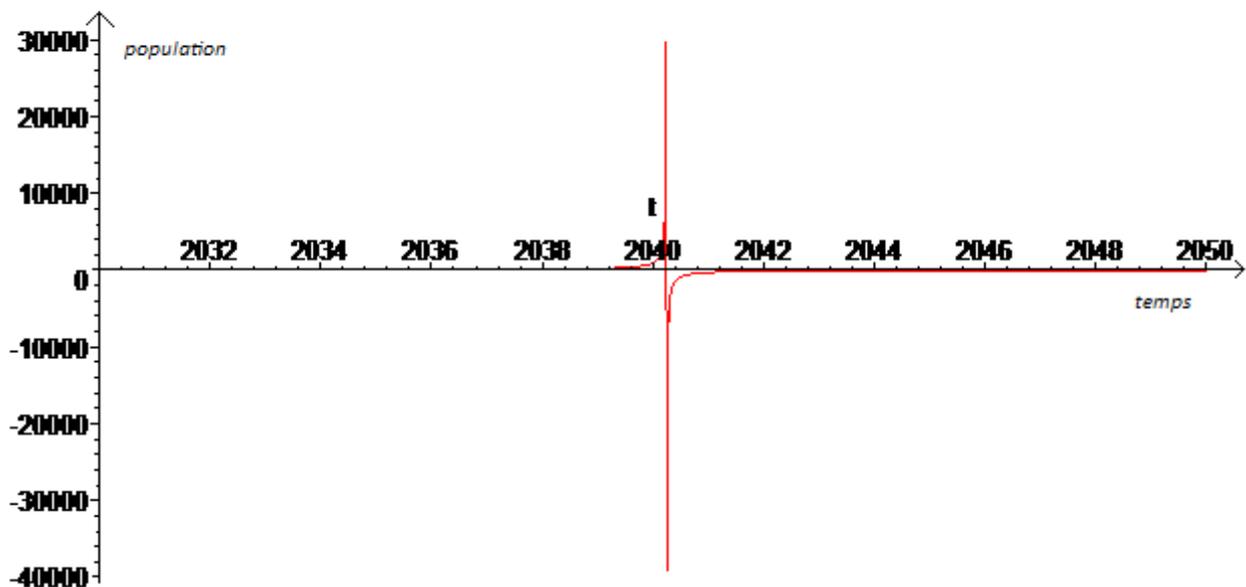
```
> with(plots);
> display(plot(solution(t),t=1740..2010),plot({[[2005,6.5]],[[2000,6.082]],[[1980,4.442]],[[1960,3.02]],[[1940,2.3]],[[1920,1.86]],[[1900,1.656]],[[1850,1.265]],[[1800,0.968]],[[1750,0.660]]},style=point,color=black,symbol=cross));
```

### COURBES OBTENUES POUR L'ACCROISSEMENT NATUREL PROPORTIONNEL À LA POPULATION :



Pour un modèle si simple, les résultats sont **étonnamment adéquats** à la réalité. Ceci semble confirmer que l'idée de chercher une relation entre l'accroissement naturel et la population est bonne. Cependant, cette solution n'est pas fiable : en effet, nous remarquons qu'elle diverge rapidement pour tendre vers l'infini aux alentours de 2040 :

### LIMITES DU MODÈLE DE L'ACCROISSEMENT NATUREL PROPORTIONNEL À LA POPULATION :



Cette solution qui diverge n'a aucun sens. Utilisons les mesures expérimentales pour évaluer l'accroissement naturel en fonction de la population :

**MESURE RÉELLES DU TAUX D'ACCROISSEMENT NATUREL EN FONCTION DE LA POPULATION:**

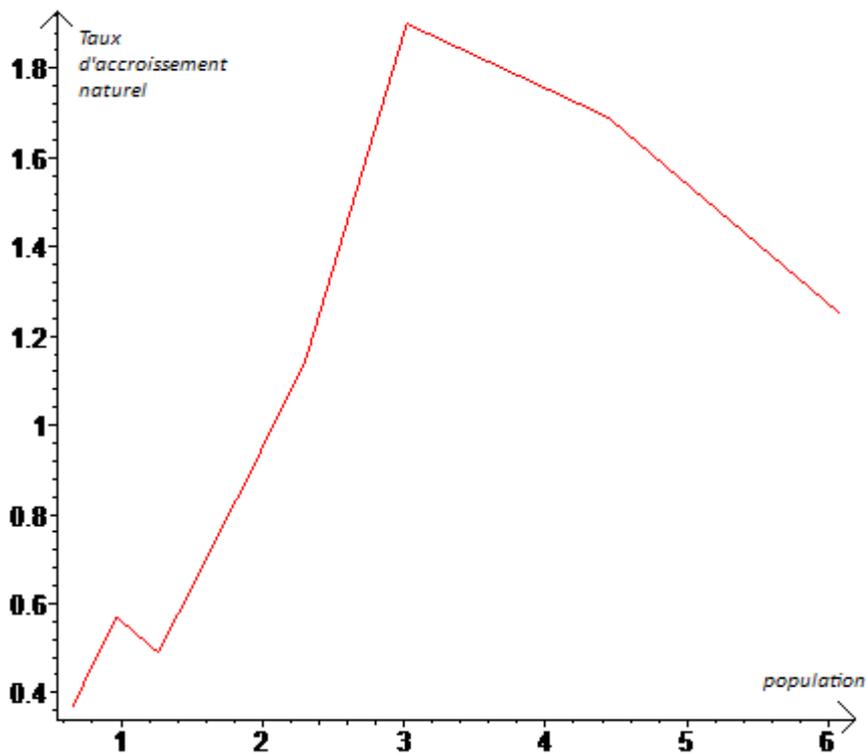
|   |      |       |       |      |      |      |       |       |
|---|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|
| <b>Population (milliards)</b>           | 0,66 | 0,968 | 1,265 | 1,86 | 2,3  | 3,02 | 4,442 | 6,082 |
| <b>Taux d'accroissement naturel (%)</b> | 0,37 | 0,57  | 0,49  | 0,86 | 1,14 | 1,90 | 1,69  | 1,25  |

Source : Bureau de recensement des Etats-Unis, et les données de l'Organisation des Nations Unies.

**PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LA COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL EN FONCTION DE LA POPULATION :**

```
>display(plot([[0.66,0.37],[0.968,0.57],[1.265,0.49],[1.86,0.86],[2.3,1.14],[3.02,1.90],[4.442,1.69],[6.082,1.25]]),style=line,color=red);
```

**COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL EN FONCTION DE LA POPULATION :**

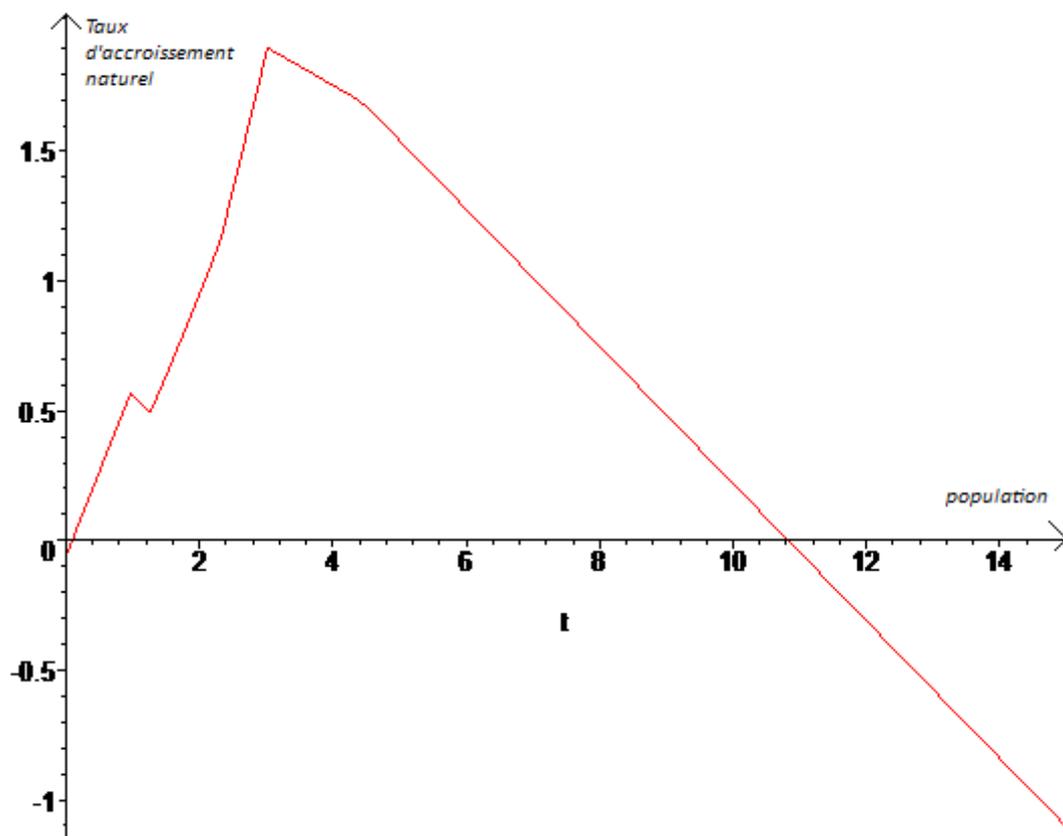


Utilisons les **modélisations présentées précédemment**. Dans un premier temps, nous considérerons l'accroissement naturel comme une fonction affine par morceaux, puis nous la modéliserons par un polynôme de Bernstein. L'incertitude est bien entendu le comportement du taux d'accroissement naturel au delà des mesures récentes. **Nous postulerons qu'il évoluera de façon affine.**

### PROGRAMME MAPPLE POUR LA FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX :

```
> AN:=unapply(piecewise(t<=0.968,0.37+(0.57-0.37)*(t-0.66)/(0.968-0.66),  
0.968<=t and t<=1.265,0.57+(0.49-0.57)*(t-0.968)/(1.265-0.968),  
1.265<=t and t<=1.86,0.49+(0.86-0.49)*(t-1.265)/(1.86-1.265),  
1.86<=t and t<=2.3,0.86+(1.14-0.86)*(t-1.86)/(2.3-1.86),  
2.3<=t and t<=3.02,1.14+(1.90-1.14)*(t-2.3)/(3.02-2.3),  
3.02<=t and t<=4.442,1.90+(1.69-1.90)*(t-3.02)/(4.442-3.02),  
4.442<=t,1.69+(1.25-1.69)*(t-4.442)/(6.082-4.42)),t);
```

### COURBE DE L'ACCROISSEMENT NATUREL OBTENUE :

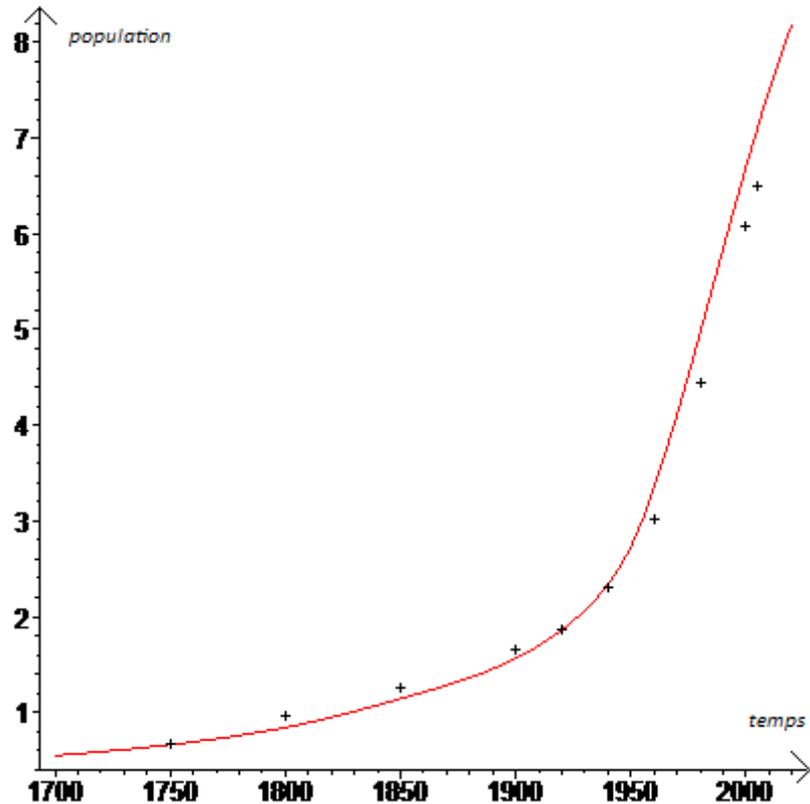


### PROGRAMME MAPPLE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :

```
> co:=0.0114;  
> solution:=dsolve({D(N)(t)=co*N(t)*AN((N)(t)),N(1750)=0.66},N(t),type=numeric);
```

On remarque la nécessité d'une nouvelle valeur numérique, et d'une constante  $co$  qui garantit l'homogénéité entre le taux d'accroissement naturel et la population.

### COURBE DE LA POPULATION OBTENUE :



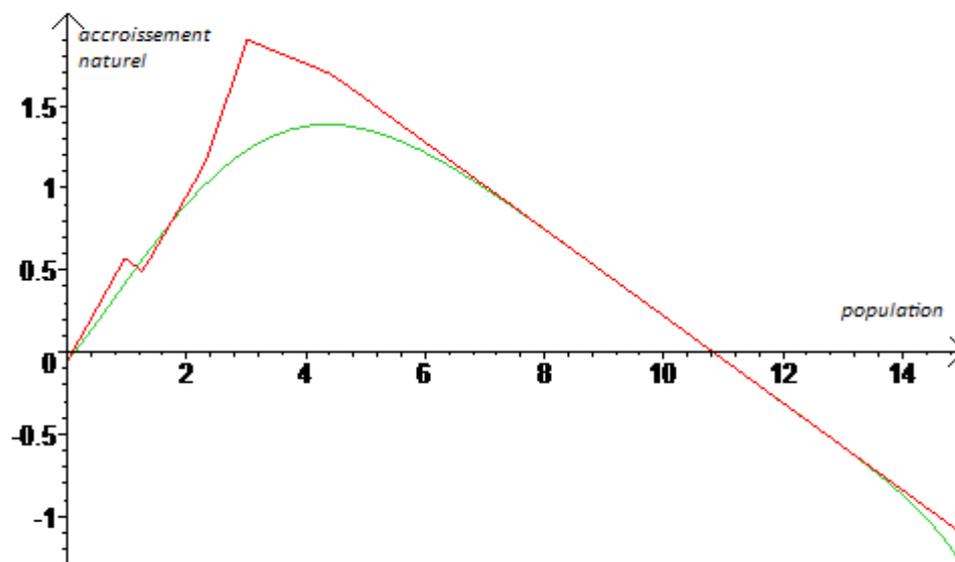
Les résultats sont adéquats à la réalité. De plus, cette solution ne diverge pas : pour des populations suffisamment élevées, l'accroissement naturel s'annule voire devient négatif.

Pour la modélisation de Bernstein, nous avons remarqué la nécessité de prendre un intervalle relativement large (de 0 à 10 milliards d'individus), sinon le taux d'accroissement naturel diverge et donc la population aussi.

### PROGRAMME MAPPLE POUR LA MODÉLISATION DE BERNSTEIN :

```
> f:=unapply(AN(t*(10)),t);  
> g:=unapply(bernstein(8,f,t),t);  
> a:=0;b:=10;ANm:=unapply(g(t/10),t);  
> plot([AN,ANm],0..10);
```

### MODÉLISATION SELON LE POLYNÔME DE BERNSTEIN :

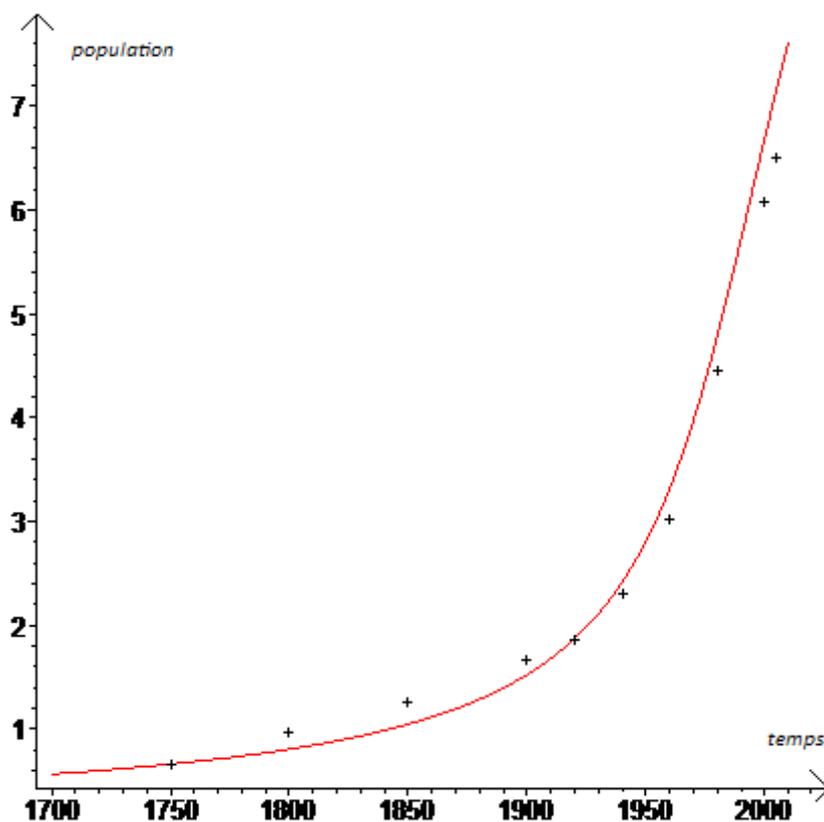


Nous avons estimé cette modélisation relativement correcte.

#### PROGRAMME MAPPLE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE :

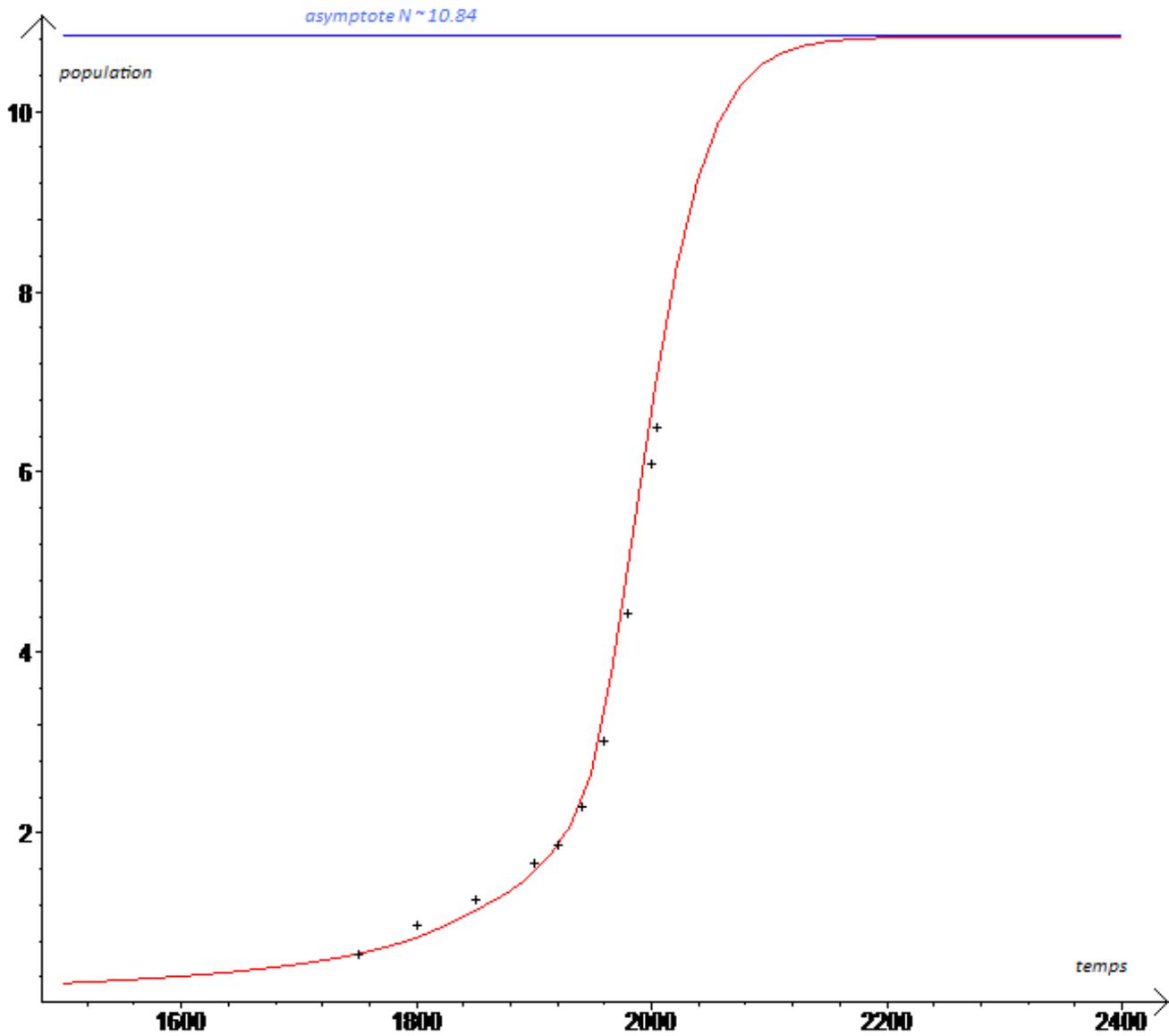
```
> co:=0.0135;  
> solution:=dsolve({D(N)(t)=co*N(t)*ANm(N)(t),N(1750)=0.66},N(t),type=numeric);  
> with(plots);  
> display(odeplot(solution,1700..2010),plot([[2005,6.5],[2000,6.082],[1980,4.442],[1960,3.02],[1940,2.3],[1920,1.86],[1900,1.656],[1850,1.265],[1800,0.968],[1750,0.660]],style=point,color=black,symbol=cross));
```

#### COURBE DE LA POPULATION OBTENUE :



La modélisation affine est tout à fait convenable, dans la mesure où elle est plus adéquate aux mesures réelles que la modélisation de Bernstein. Étudions les conséquences de la modélisation affine à long terme. En effet, la résolution numérique nous donne **une solution qui ne diverge pas vers l'infini, donc exploitable.**

$$N(2400) = 10.825577$$



Nous obtenons des **valeurs cohérentes** sur tout intervalle étudié.

Ce modèle, élaboré par nos soins d'après le modèle de Malthus, aboutit à **une population limite de 11 milliards d'habitants, atteinte aux environs de 2170**. On peut expliquer cette stagnation par la relation entre le taux d'accroissement naturel et la population : arrivée à 11 milliards, la population décroît. Le taux d'accroissement naturel augmente alors, faisant croître la population, ce qui aboutit à une diminution du taux, et ainsi de suite. Ainsi, ce modèle aboutit à une **population stable** au delà de 2200 (accroissement naturel constant).

Ce modèle semble bien rendre compte d'une **population limite supportable par la planète**. L'**adéquation stupéfiante des résultats expérimentaux** aux mesures théoriques permet de donner un certain crédit à ce modèle. Cependant, il est évident qu'il ne permet pas de prédire avec fiabilité l'évolution de l'espèce humaine. En effet, nous ne pouvons qu'émettre des hypothèses sur le **comportement de l'accroissement naturel pour une population supérieure** à la population actuelle (d'où l'hypothèse de l'évolution affine). Ensuite, ce modèle **néglige beaucoup trop d'aspects importants**, notamment la relation avec l'environnement, et les guerres. La pénurie d'eau et de pétrole provoquera probablement une forte chute de l'accroissement naturel. Pour prévoir l'évolution de la population humaine, il semble alors que la seule possibilité soit d'**émettre des hypothèses sur l'évolution du taux d'accroissement naturel dans les années à venir**, en fonction de tous ces facteurs. Le modèle étudié serait probablement fiable si nous vivions encore pendant de nombreuses années dans les mêmes conditions environnementales où nous avons vécu.

L'énorme défaut de tous ces modèles, c'est qu'ils se limitent à une simple interprétation des taux d'accroissement naturels mesurés au cours du temps. Comme il est peu probable que ce taux évolue de façon affine après 2010, le modèle ne permet pas la prédiction de l'évolution de la population humaine dans le futur. Il permet juste de prouver, par l'étonnante exactitude de ses résultats théoriques, que **modéliser la dynamique de la population humaine revient à modéliser le taux d'accroissement naturel**.

### III) Généralisation du modèle de Malthus amélioré aux populations pseudo-isolées



Thomas Malthus  
économiste britannique  
1766 - 1834

Nos résultats sont tous obtenus sur l'humanité considérée dans son ensemble. Mais ce modèle est-il valable pour toute population humaine ? Il semblerait que non. A l'échelle locale, toute population subit des interactions (émigrations, immigrations...) non négligeables.

Certains modèles mathématiques existent pour les prendre en compte. Nous avons voulu voir si nous pouvions étendre notre modèle pour approximer d'autres dynamiques de populations. Pour cela, nous nous penchons sur des populations presque isolées, c'est à dire qui n'ont pas eu beaucoup d'échanges migratoires avec le reste du monde. C'est le cas de plusieurs populations insulaires, en particulier le Japon. On étudiera ici directement le taux d'accroissement naturel en fonction de l'effectif de la population.

MESURE RÉELLES DU TAUX D'ACCROISSEMENT NATUREL (ESTIMATIONS) :

| Date                             | 1875 | 1905 | 1948 | 1960 | 1970 | 1985 | 2000 |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Population (millions)            | 34   | 49   | 80   | 95   | 105  | 120  | 125  |
| Taux d'accroissement naturel (%) | ??   | ??   | 0,25 | 0,12 | 0,14 | 0,07 | 0,02 |

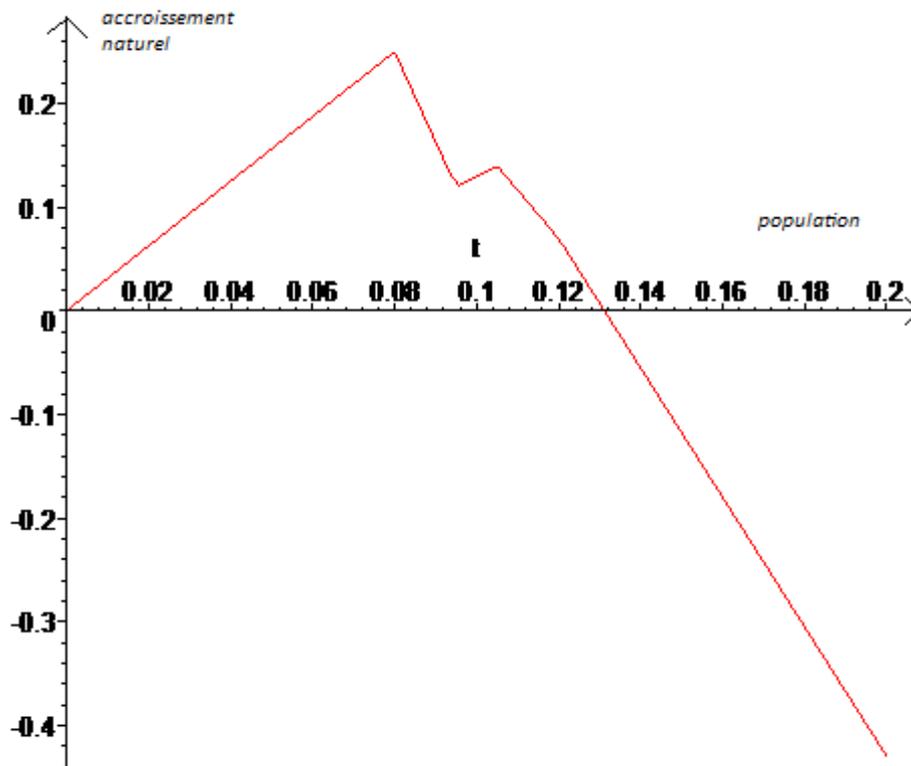
Source : Japan Statistical Hnadbook (2004)

Nous avons conclu que la modélisation affine suffit. La modélisation affine par morceaux de l'accroissement naturel nippon en fonction de l'effectif de la population donne :

PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LA COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL :

```
>AN:=unapply (piecewise (t<=0.08,0+(0.25-0)*(t-0)/(0.08-0),
0.08<=t and t<=0.095,0.25+(0.12-0.25)*(t-0.08)/(0.095-0.08),
0.095<=t and t<=0.105,0.12+(0.14-0.12)*(t-0.095)/(0.105-0.095),
0.105<=t and t<=0.120,0.14+(0.07-0.14)*(t-0.105)/(0.120-0.105),
0.120<=t,0.07+(0.02-0.07)*(t-0.120)/(0.128-0.120)
),t);
```

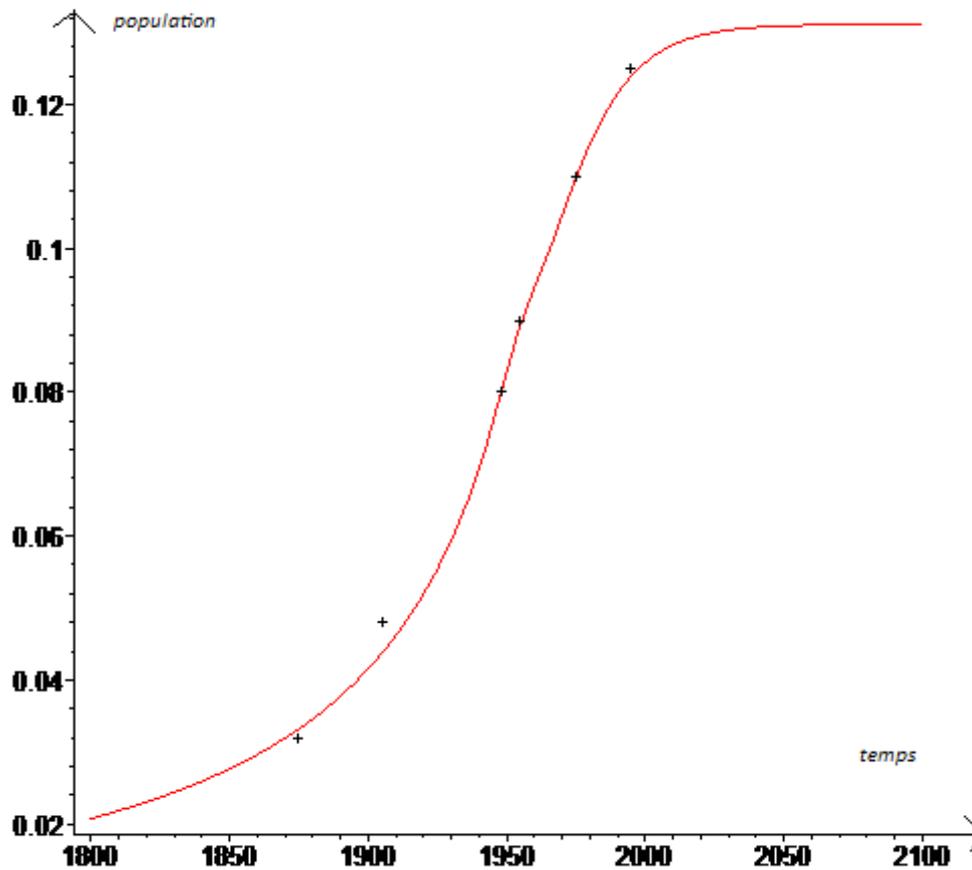
### COURBE DES MESURES D'ACCROISSEMENT NATUREL :



On résout ceci de la même façon que précédemment, par une équation différentielle numérique.

### PROGRAMME MAPPLE POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE :

```
>co:=0.0774;  
>solution:=dsolve({D(N)(t)=co*N(t)*AN(N)(t),N(1948)=0.080},N(t),type=numeric);  
>with(plots);  
>display(odeplot(solution,1800..2100),plot([[1875,0.032],[1905,0.048],[1995,0.125],[1975,0.11],[1955,0.09],[1948,0.08]],style=point,color=black,symbol=cross),color=blue);
```



On remarque que les résultats théoriques sont tout aussi adéquats aux mesures expérimentales que précédemment. Dans ce cas aussi, modéliser l'évolution de la population revient à modéliser l'accroissement naturel en fonction de l'effectif.

On peut donc prévoir, grâce au même modèle, l'évolution de la population nipponne et de la population mondiale. Cependant, pour faire ces calculs, nous **avons utilisé des courbes d'accroissement naturel spécifiques à la population étudiée**. Mais celles-ci ont **globalement la même allure**. D'où l'idée d'utiliser **une courbe moyenne** pour les deux problèmes, et d'observer les résultats obtenus. On pourra adapter cette courbe à tous les problèmes par l'intermédiaire d'un nouveau **coefficient multiplicateur *Can***, de telle façon que  $population * Can$  appartiennent à l'intervalle de définition de la fonction. De cette manière, lorsque l'effectif de la population décrira l'intervalle qu'il doit décrire,  $population * Can$  décrira l'ensemble de définition de cette fonction.

$$AN(x) = AN( Can N(t) ) = ANreel(N(t))$$

$$0 < x < 2$$

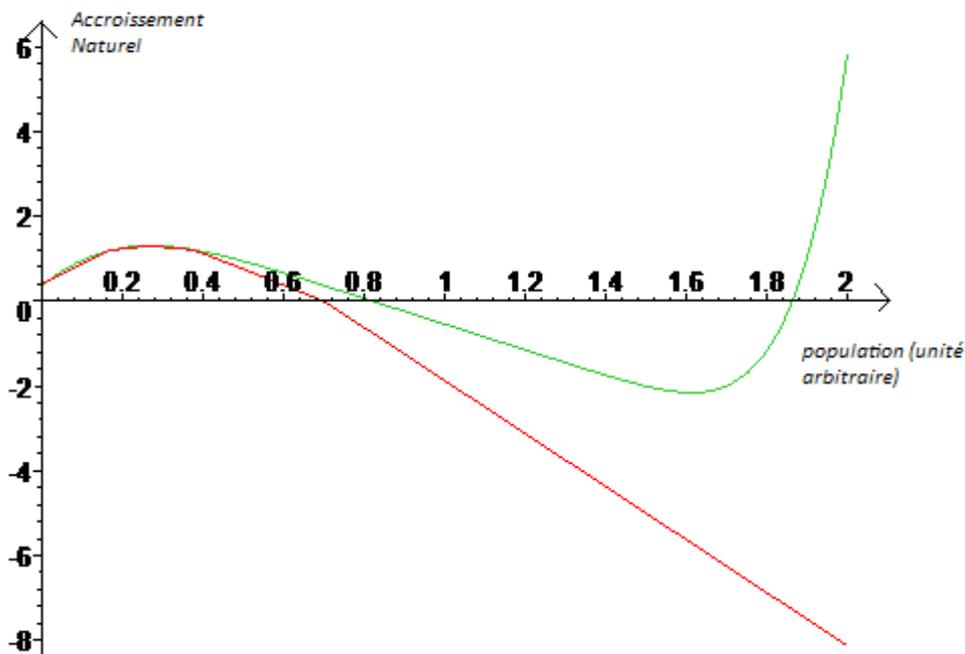
On peut ainsi rapporter toute population à la courbe moyenne.

Nous avons utilisé la modélisation de Bernstein pour établir la fonction affine qui nous servira de base. Celle-ci pourra être adaptée à nos besoins. Nous n'utilisons pas la modélisation de Bernstein car elle n'est pas fiable en dehors de l'intervalle [0,1] : elle redevient croissante, alors que nous avons besoin d'une fonction strictement négative.

**PROGRAMME MAPPLE POUR ÉTABLIR LA COURBE MOYENNE D'ACCROISSEMENT NATUREL :**

```
> f:=unapply(piecewise(t<=0.17,0.4+(1.2-0.4)*(t-0)/(0.17-0),
t>=0.17 and t<=0.27,1.2+(1.3-1.2)*(t-0.17)/(0.27-0.17),
t>=0.27 and t<=0.38,1.3+(1.2-1.3)*(t-0.27)/(0.38-0.27),
t>=0.38 and t<=0.70,1.2+(0-1.2)*(t-0.38)/(0.70-0.38),
t>=0.70,(0-2)*(t-0.70)/(0.70-0.38)),t);
> g:=unapply(7.447777780*t+71.4527175*t^6-14.35984527*t^2-
26.29192303*t^7+.3700000000+73.1343463*t^4-
15.2475444*t^3+4.00846756*t^8-101.0601074*t^5,t);
> plot({g,f},0..2);
```

**COURBE D'ACCROISSEMENT NATUREL MOYENNE OBTENUE :**

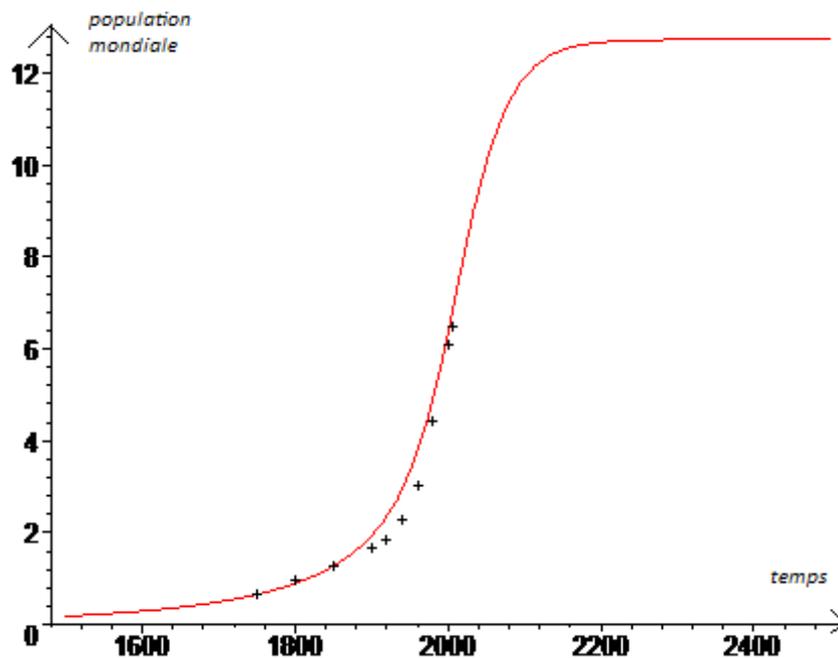


La modélisation de Bernstein (ici en vert) n'est donc pas adéquate. Essayons de **retrouver les résultats pour les deux cas (Japon et monde) à l'aide de cette courbe et d'un coefficient multiplicateur à déterminer**. On le fixe à l'aide de la commande *solve* et d'un ajustement manuel.

**PROGRAMME MAPPLE D'UTILISATION DE LA COURBE MOYENNE D'AN POUR LA POPULATION MONDIALE :**

```
> co:=0.0103;  
> ca:=0.055;  
> solution:=dsolve({D(N)(t)=co*N(t)*f(N(t)*ca),N(1750)=0.66},N(t),t  
type=numeric);  
> with(plots);  
> display(odeplot(solution,1500..2500),plot([[2005,6.5]],[[2000,6.  
082]],[[1980,4.442]],[[1960,3.02]],[[1940,2.3]],[[1920,1.86]],[[19  
00,1.656]],[[1850,1.265]],[[1800,0.968]],[[1750,0.660]]],style=poi  
nt,color=black,symbol=cross));
```

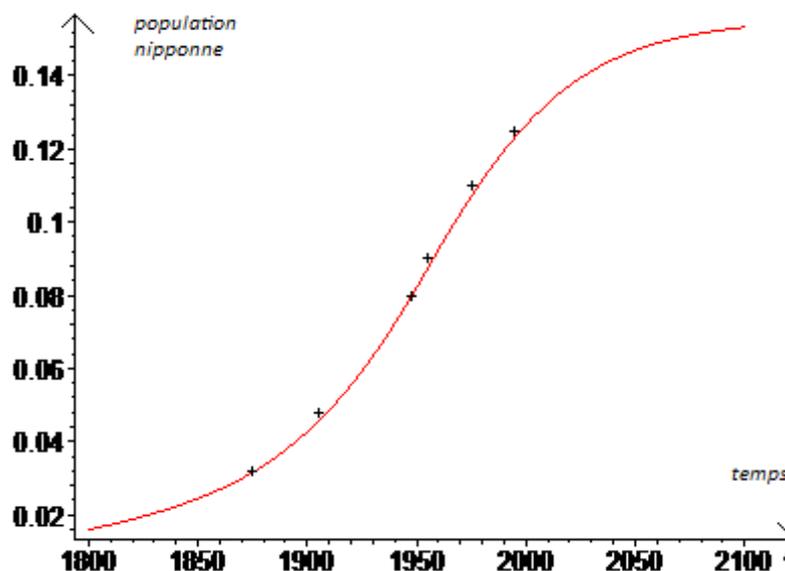
**UTILISATION DE LA COURBE MOYENNE POUR RETROUVER LA POPULATION MONDIALE :**



#### PROGRAMME MAPPLE D'UTILISATION DE LA COURBE MOYENNE D'AN POUR LA POPULATION NIPPONNE :

```
> cob:=0.0104;  
> cab:=4.5;  
> solutionb:=dsolve({D(N)(t)=cob*N(t)*f(N(t)*cab), N(1948)=0.08}, N(t), type=numeric);  
> with(plots);  
> display(odeplot(solutionb, 1800..2100), plot([[1875, 0.032], [1905, 0.048], [1995, 0.125], [1975, 0.11], [1955, 0.09], [1948, 0.08]], style=point, color=black, symbol=cross), color=blue);
```

#### UTILISATION DE LA COURBE MOYENNE POUR RETROUVER LA POPULATION NIPPONNE :



La surprenante adéquation de ces résultats expérimentaux aux mesures réelles, basés sur une **courbe moyenne d'accroissement naturel** en fonction de la population, suggère que ce modèle fonctionne pour **n'importe quelle population isolée**. La **généralisation de notre modèle semble donc réussie**. Nous avons donc conçu un **programme Maple** qui, à partir de deux mesures de population et d'accroissement naturel, calcule les valeurs des coefficients variables et **donne l'allure de l'évolution de la population**. Il prévoit aussi la **limite de la population** dans son milieu, et la date à laquelle elle sera approchée. Les explications détaillées sont données au fil du code.

## PROGRAMME MAPLE FINAL - ANALYSE DE L'ÉVOLUTION DE POPULATION PSEUDO-ISOLÉE, À PARTIR DE DEUX VALEURS DE POPULATION ET D'ACCROISSEMENT NATUREL :

```
AnalysePopulation:= proc (date1,pop1,an1,date2,pop2,an2)
```

Définition des paramètres : fonction AN en fonction de la pop (sans unités), coefficient de multiplication général de l'AN (repéré grace à nos mesures précédente, invariant), initialisation de la variable de différence "dif".

```
AN:=unapply (piecewise (t<=0.17,0.4+(1.2-0.4)*(t-0)/(0.17-0),
                        t>=0.17 and t<=0.27,1.2+(1.3-1.2)*(t-0.17)/(0.27-0.17),
                        t>=0.27 and t<=0.38,1.3+(1.2-1.3)*(t-0.27)/(0.38-0.27),
                        t>=0.38 and t<=0.60,1.2+(0-1.2)*(t-0.38)/(0.60-0.38),
                        t>=0.60,(0-2)*(t-0.60)/(0.60-0.38)),t):
```

```
K:=0.011:
dif := pop2:
```

1- Détermination du coefficient Can, multipliant la population N argument de la fonction AN, pour l'ajuster à cette fonction définie sur [0,1]. Le coefficient k2 permet d'accepter n'importe quelle unité pour les paramètres du programme en gardant K invariant. Il est inutile pour nous de le récupérer

```
solCan:=solve ({an1=k2*pop1*AN(Can*pop1),an2=k2*pop2*AN(Can*pop2),Can>0},{k2,Can}):
```

On récupère les solutions valables (celles où Can a une valeur précise)

```
for i from 1 to nops([solCan]) do
  if (nops(solCan[i]) < 3 and lhs((solCan[i])[2])=Can ) then
```

La première condition évite les inéquations, la deuxième vérifie la position de Can, qui peut être soit en première position, soit en seconde

```
  try
    ce try permet d'éviter les erreurs de délimitation du dsolve
    on vérifie ensuite l'adéquation de chaque solution aux valeurs de populations, en stockant dans Cap la ième solution.
```

```
  Cap:=(rhs((solCan[i])[2])):
  resolprovisoire:=dsolve({diff(N(t),t)=K*N(t)*AN(Cap*N(t)),N(date1)=pop1},numeric);
  val :=rhs(resolprovisoire(date2)[2]);
```

C'est ici qu'on utilise "dif", valeur de la plus petite différence entre pop2 et la valeur de pop2 obtenue par résolution provisoire ("val"). On enregistrera sous le nom procpop la procédure numérique donnant la population, qui sera définie grace à Cad, le Can définitif le plus adéquat. Ce sera celle pour laquelle "dif" sera la plus faible.

```
  if (abs(pop2 - val) < dif) then
    dif := abs(pop2 - val);
    Cad := (rhs((solCan[i])[2])):
  fi;
```

```
end try:
fi:
```

Cas où Can est en première position dans le résultat (même principe).

```
if (nops(solCan[i]) < 3 and lhs((solCan[i])[1])=Can ) then
```

```
  try
    Cap:=(rhs((solCan[i])[1])):
    resolprovisoire:=dsolve({diff(N(t),t)=K*N(t)*AN(Cap*N(t)),N(date1)=pop1},numeric);
    val :=rhs(resolprovisoire(date2)[2]);
    if (abs(pop2 - val) < dif) then
      dif := abs(pop2 - val);
      Cad := (rhs((solCan[i])[1])):
    fi;
```

```
  end try:
  fi:
```

```
od:
```

Définition de procpop

```
procpop:=dsolve({diff(N(t),t)=K*N(t)*AN(Cad*N(t)),N(date1)=pop1},numeric);
```

2 - Détermination de l'intervalle d'affichage. Les coefficients ont été ajustés subjectivement pour un résultat optimal. On s'arrêtera quand la courbe est quasiment plate.

```
fin:=max(date1,date2);
while (rhs(procpop(fin+10)[2]) - rhs(procpop(fin)[2]) > 0.00000001*max(pop1,pop2)) do
  fin:=fin+10;
od;
```

On en profite pour prendre la valeur de la population, c'est à dire la valeur de la limite de population.

```
limite := rhs (procpop(fin) [2]);
```

On détermine le début de la même façon, avec une plus grande tolérance.

```
debut:=min(date1,date2);  
while (rhs (procpop(debut) [2]) - rhs (procpop(debut-10) [2]) > 0.01*min(pop1,pop2)) do  
  debut:=debut-10;  
od;
```

3 - Texte descriptif de la limite. On approxime la limite à 3 chiffres significatifs :

```
print ("La limite de la population devrait approximer");  
print (evalf[3](limite));  
print ("unité de population utilisée");
```

On trouve date, la valeur pour laquelle la valeur approchée de la limite est atteinte. Après cette valeur, la population augmente très lentement vers une asymptote.

```
date:=max(date1,date2);  
while (evalf[3](limite) <> evalf[3](rhs (procpop(date) [2]))) do  
  date:=date+10;  
od;  
print ("et serait atteinte aux alentours de");  
print (evalf[3](date));
```

Graphique final.

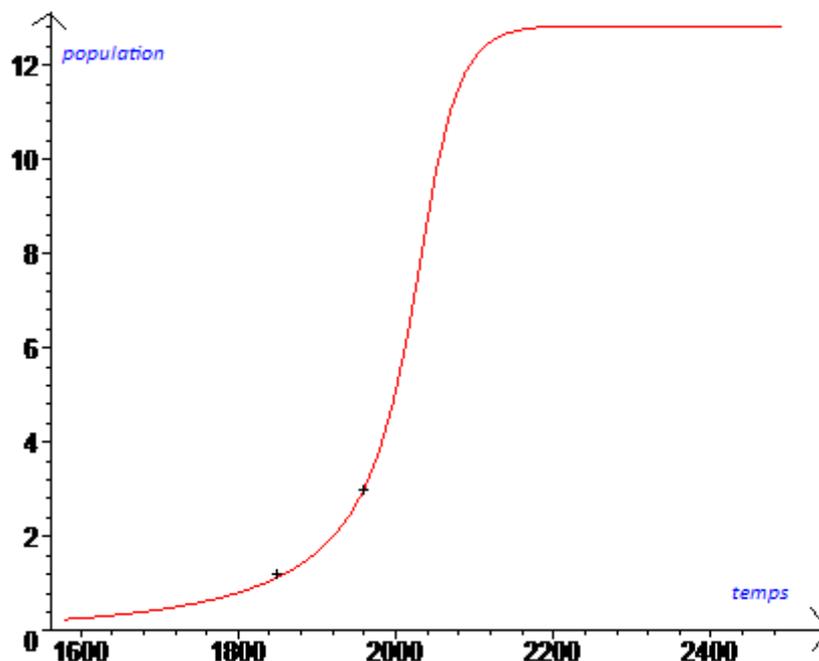
```
with(plots);  
display(odeplot(procpop,debut..fin),plot([[date1,pop1],[date2,pop2]],style=point,color=black,symbol=cross));
```

```
end proc;
```

#### APPLICATION À LA POPULATION MONDIALE (EN MILLIARDS) :

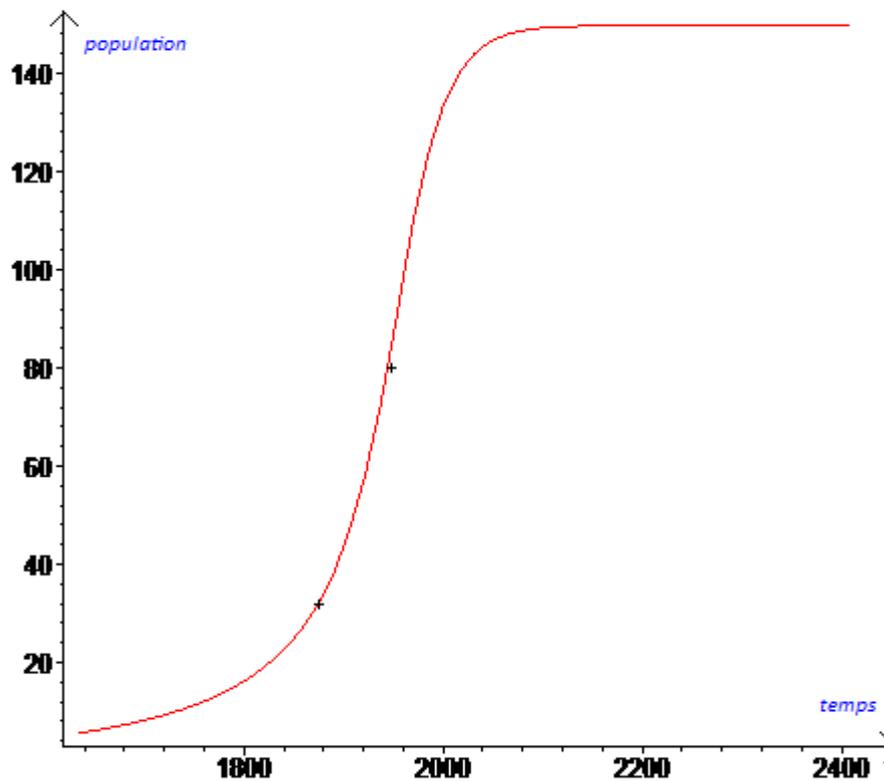
```
> AnalysePopulation(1960,3,1.9,1850,1.225,0.49);
```

"La limite de la population devrait approximer"  
12.8  
"unité de population utilisée"  
"et serait atteinte aux alentours de"  
2160.



```
> AnalysePopulation(1875,32,0.8,1948,80,2.5);
```

"La limite de la population devrait approximer"  
150.  
"unité de population utilisée"  
"et serait atteinte aux alentours de"  
2120.



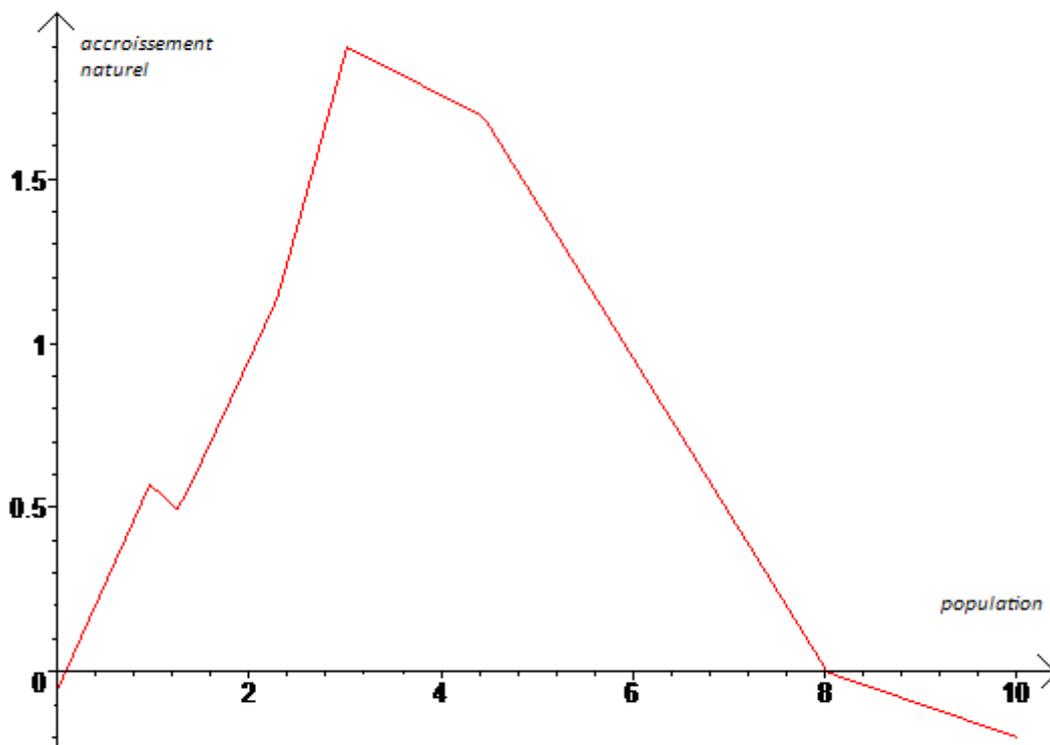
## - Conclusions -

Le modèle mathématique qui semble le mieux décrire la croissance de l'espèce humaine reste le **modèle exponentiel avec des coefficients variables**. Il suffit alors de **déterminer l'expression mathématique de ces coefficients** (notamment du taux d'accroissement naturel) pour prévoir l'évolution de la population humaine, que ce soit **en fonction du temps ou de la population**.

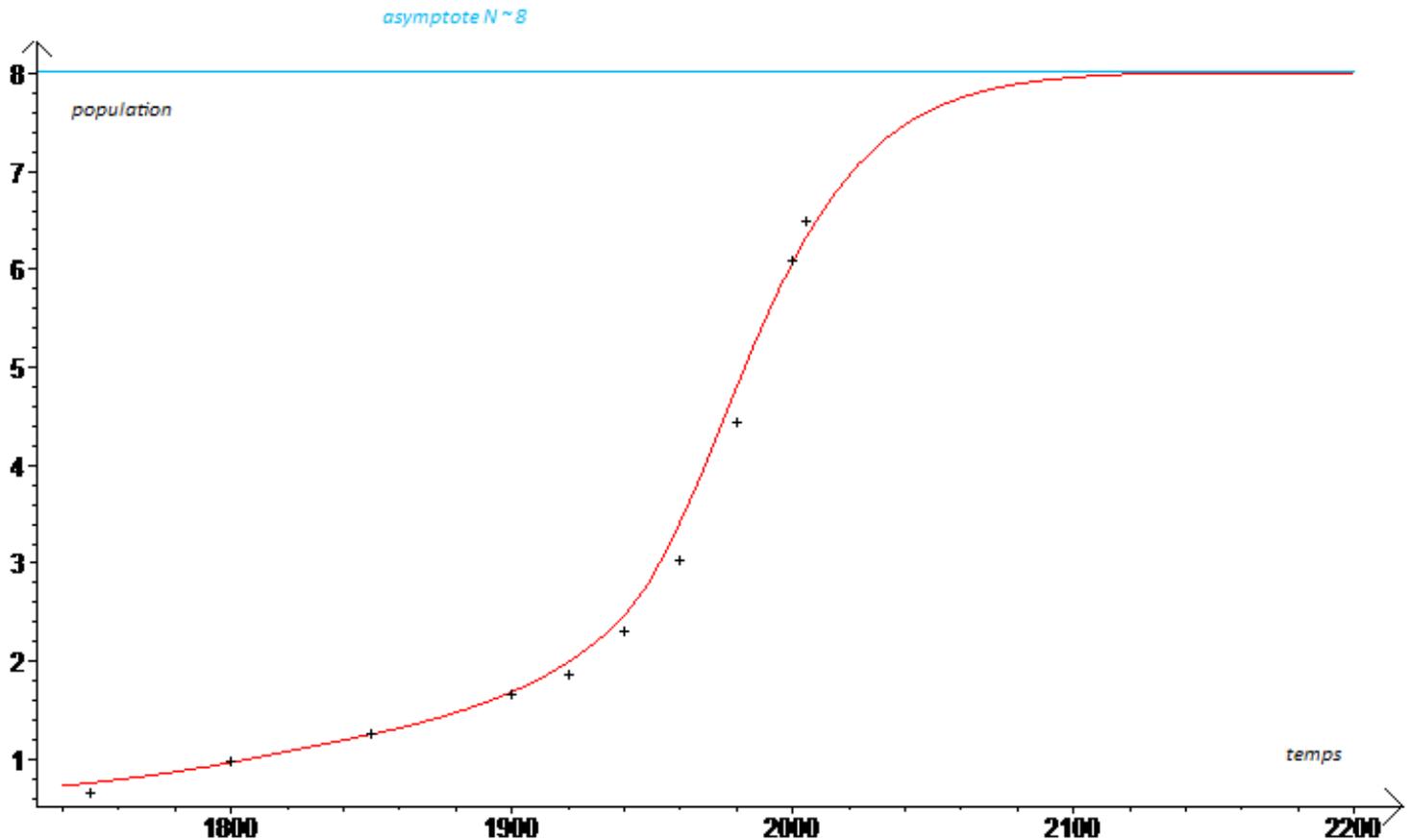
Le programme Maple peut prévoir l'allure de la courbe de **toute population pseudo-isolée dans son milieu** (perturbations négligeables, pas d'interactions avec l'extérieur). En effet, l'expérience montre que ces populations semblent avoir la même évolution, avec un accroissement naturel fonction de leur population. Ces hypothèses permettent de déterminer une **population limite** pour toute population isolée, en l'absence de perturbation.

Mais cette approximation n'est pas toujours fiable. L'espèce humaine est soumise à de **nombreux facteurs aléatoires**. Seules des **hypothèses sur l'évolution future**, et des vérifications fréquentes pourraient permettre une modélisation efficace. En effet, le problème est beaucoup trop complexe pour modéliser l'évolution de l'accroissement naturel, que ce soit en fonction du temps ou de la population, par une fonction simple. D'où l'**utilité de la fonction affine par morceaux, que l'on peut aisément modifier au fil des prévisions**. (chute démographique pour une guerre, par exemple). Ci dessous, un exemple de prévision cohérente (chute du taux d'accroissement naturel, puis ralentissement dès que l'accroissement naturel devient négatif) :

**COURBE DE L'ACCROISSEMENT NATUREL HYPOTHÉTIQUE :**



## COURBE DE LA POPULATION OBTENUE :



Cette prévision (totalement hasardeuse) aboutit à une **population stable**. De la même façon, on peut imaginer de nombreuses possibilités pour le futur. Pour des raisons techniques, il est **préférable de modéliser l'accroissement naturel en fonction de la population** (intervalle  $[0;15]$ ) qu'en fonction du temps (intervalle  $[0;2500]$ ), cela dit, rien n'exclut cette possibilité.

De cette façon, on peut évaluer plusieurs scénarios pour l'évolution future en comparant leur cohérence aux mesures expérimentales actuelles. Cela permettrait de **prévoir avec plus ou moins d'exactitude l'évolution de la population humaine**.

## - Bibliographie -

**Images :** Wikipedia

**Dates et éléments biographiques :** Wikipedia

**Documents complémentaires (modèles existants) :**

Module de Dynamique des Populations - Professeur Patrice Francour (membre du GEM, du Laboratoire Environnement Marin Littoral

Université Joseph Fourier (Grenoble) - documents en ligne

Wikipedia d'après Christelle Magal, Université François Rabelais, Tour

School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland

Université de Lyon - Enseignement doctoral

**Résultats de Malthus :** Mathematical Biology, J.D. Murray, Biomathematics Texts, Springer (1994)

**Mesures de population mondial :** Bureau de recensement des Etats-Unis, et les données de l'Organisation des Nations Unies.

**Mesures d'accroissement naturel mondial :** Estimations de Willcox (1940) et Carr-Saunders (1936) ajustés et utilisés par les Nations Unies (1953:12, 1993:6-7) et la CIA (1993:422).

**Mesures de population et d'accroissement naturel du Japon :** Japan Statistical Yearbook (2004) Population of Japan 1875-1915 from Census Tables of the Meiji and Taisho Eras, Toyo Keizaishinbunsha (Toyo Economic Newspaper Co.) p.634.

Population of Japan 1920-1985 from Census Tables of the Showa Era, Toyo Keizaishinbunsha (Toyo Economic Newspaper Co.)

Rédigé sous Open Office.org 2.2.0 (Sun Microsystem Inc)

Logiciel de calcul formel Maple 11.01 (Star Divison GmbH)

***Bourse Yoann***

***Lemaire Alan***

***MPSI 2 - LYCÉE HENRI WALLON - VALENCIENNES***